El àrbol de las Matemáticas Fuente: Freepik, modificado por Ramon Ferrer i Marí.

MI LIBRO DE MATEMÁTICAS.

Compilación corregida por Jesús Guanter i Marí, Licenciado en Ciencias Físicas por la Universitat de València y profesor de l'Escola La Masía, de Museros, (València).

DESCRIPCIÓN BREVE

Todas las Matemáticas para el día a día, y a nivel GRADUADO EN E.S.O. (España)

RAMON FERRER I MARÍ

INDICE	Página
INTRODUCCIÓN	2
¿QUÉ PUEDES ESPERAR DE ESTE MI LIBRO?	5
COMPETENCIA MATEMÁTICA VITAL	10
LAS DOCE PRUEBAS DE "ALBERTIX"	12
¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?	24
UNA HOJA DE RUTA O MAPA PARA APRENDER MATEMÁTICAS	28
LAS 4 REGLAS	39
NÚMEROS NATURALES	70
POTENCIAS	92
RAÍCES	104
RELACIÓN ENTRE POTENCIAS, RAICES Y LOGARITMOS. FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA	106
NÚMEROS ENTEROS	130
FRACCIONES	143
NÚMEROS DECIMALES	151
NÚMEROS IRRACIONALES: ESTUDIO DE π e φ	152
SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS	159
GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO	176
ARITMÉTICA DE LAS PROPORCIONES	207
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	243
ÁLGEBRA	244
SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES	297
ANÁLISIS MATEMÁTICO I	318
ANÁLISIS MATEMÁTICO II	369
INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS	394
INTRODUCCIÓN A LAS INTEGRALES	426
GEOMETRIA ANALÍTICA DE LA RECTA	445
EL PROCESO L.E.D.O.C.	453
APUNTES	463
PROFESORES YOUTUBE	464
PSICOLOGIA, VIDA COTIDIANA Y MATEMATICAS	466
GRANDES PIFIAS DE AYER Y HOY…	473

RAMON PERI I MARÍ

Soy un señor de 57 años. Nací en Barcelona, de padres valencianos. Me encanta escribir y enseñar. Y soy lo que se llama una persona "*de letras*", o sea, que para mí las matemáticas fueron un trago insufrible. Me recuerdo en mi colégio, llorando desconsoladamente, porque no sabia dividir una cantidad entre dos cifras. Aunque lo desconocía, a eso se le llama **discalculia(*)**. No querría que a nadie más le pasara algo tan doloroso y traumatizante como eso.

Puedo elegir quedarme en un rincón, llorando mi desgrácia, o puedo elegir echarle valor y, superando mi indefensión aprendida respecto a las matemáticas, volver a aprenderlas, aprovechando las nuevas tecnologías (Videos de YouTube) y los nuevos libros de texto.

Respecto a los primeros, al final de este libro te dejo un listado de profesores YouTubers muy interesantes. Es una lista totalmente subjetiva, es decir, son aquellos profes cuyas enseñanzas me han servido personalmente. Obviamente hay muchos más. Tu debes revisarlos todos hasta que encuentres, al menos, uno/a que te haga fáciles las matemáticas.

Respecto a los segundos, no tienen nada que ver con los que yo tuve que lidiar en mis años formativos, que fueron las décadas de 1970 y 1980. Aconsejo especialmente los libros de texto del colectivo Marea Verde, que se pueden encontrar y descargar gratuitamente en la siguiente página web:

www.apuntesmareaverde.org.es

(*) Es un patrón de dificultades que se caracteriza por problemas de procesamiento de la información numérica, el aprendizaje de operaciones aritméticas y el cálculo correcto y fluido. En definitiva, la dificultad por procesar la información numérica. Muchas veces, los alumnos con discalculia son competentes en otras áreas, pero en el ámbito numérico presentan serias dificultades.

Respecto a fiabilidad de contenidos de este libro, No temáis, que mi querido primo Jesús Guanter i Marí, Licenciado en Ciencias Físicas por la Universitat de València, y profesor de *l'Escola La Masía*, de Museros, lo ha corregido y se ha asegurado de que no diga ninguna burrada.

RAMON FERRER I MARÍ

DEDICATORIA 1.

"(...) espíritu de sacrificio no es sólamente tomar el fusil y estar en la trinchera, sino tomar los libros y estudiar. Eso es heroismo también... Se puede hacer una profesión con interés personal para proyectarse y, al mismo tiempo, servir a la sociedad que lo contiene"...

Alberto Nicolás Deluchi Levene, Veterano de la Guerra de Las Malvinas como Médico Cirujano del ARA General Belgrano, hundido el 2 de Mayo de 1982.

A los hermanos argentinos que combatieron en la Guerra de Las Malvinas.

A los héroes que cayeron en el campo del honor durante la guerra.

A los héroes que perdimos en la dura postguerra.

Y los héroes que han aprendido a vivir con los demonios y los recuerdos que les persiguen, día a día, y que no han tirado la toalla.

Con mi profundo cariño, respeto y admiración.

RAMON FERRER I MARÍ

DEDICATORIA 2

"*Entre los dedos de las manos,*

Los dedos de los piés,

El genital y mis senos,

Me suman veintitrés…".

María Primitiva Sánchez Martínez, una mujer especial, que me hizo reír en tiempos oscuros, un corazón noble y un espíritu libre. A donde quiera que te haya acogido la verde tierra asturiana, sirvan estas líneas de cariñoso reconocimiento.

Albert Einstein dijo una vez: **"Todo el mundo es un genio. Pero si juzgas a un pez por su habilidad para trepar a un árbol, vivirá toda su vida creyendo que es un inútil".**

Éste es MI libro de Matemáticas. Lo he personalizado buscando cumplir con los 12 contenidos que define el Profesor Miquel Albertí Palmer como la Competencia matemática vital. Básicamente está al nivel de alguien que precise sacarse el Graduado en Educación Secundaria (E.S.O.). Aunque más del 90% del libro procede de dos textos de Marea Verde, lo he enriquecido con aportes míos y de otras fuentes, que aparecen en el listado de Profesores YouTubers. También he incorporado, como *ampliación*, las partes de Análisis Matemático y de Geometría Analítica de la recta.

Con mi profunda admiración por todos/as aquellos/as afortunados/as a quienes se les dan bien las matemáticas.

Amb amor infinit cap al meu cosí Jesús, per existir i ser la lumbrera que és.

Barcelona, març de 2024 a març de 2025.

RAMON FERRER I MARÍ

¿QUÉ PUEDES ESPERAR DE ESTE MI LIBRO?

Este libro lo he escrito para cubrir la necesidad de conocimiento matemático a dos niveles complementarios:

Es para cualquiera que desee repasar aquellas matemáticas básicas que el Catedrático D. Miquel Albertí Palmer ha marcado como 12 habilidades imprescindibles para poder desenvolverse cómodamente en la vida cotidiana.

Y también he pensado en cualquiera que desee conocer matemáticas a nivel de GRADUADO EN EDUCACIÓN SECUNDÁRIA OBLIGATORIA (E.S.O.), que comprende cuatro cursos para alumnos entre los 12 y los 16 años, según el modelo educativo vigente en España.

Es un libro sin ejercicios, puesto que pretende ser un texto de consulta, con una forma algo diferente de explicar. Ya hay muchos videos de YouTube donde encontrar ejercicios desarrollados y propuestos, así como libros con su correspondiente solucionario al final de los mismos.

Le he puesto cariño y un año de mi vida.

Las matemáticas son importantes porque son una caja de herramientas intelectuales que nos han servido para controlar nuestro entorno y andar el largo camino que nos separa del hombre de las cavernas.

RAMON FERRER I MARI

Pero mucha gente, no las vive, las sufre como si fuesen unas dolorosas hemorroides y sobrevive a ellas, lo mejor que puede.

Afortunadamente ya hace algunos años que el progreso social en la Psicología del aprendizaje puede explicar las dificultades que algunas personas tienen con las mates. Os reproduzco trozos de un interesantísimo artículo[1] para profesores/as de matemáticas que, a mi entender, ilustra muy bien esta situación:

"*Frases como «yo no sirvo para las matemáticas» se oyen, desgraciadamente, muy a menudo en las aulas (y en la calle). Para muchos estudiantes, las matemáticas son una asignatura difícil y frustrante. Por tanto, ayudarlos a superar esta sensación para mejorar su aprendizaje supone un reto. Pero, ¿qué es lo que hace que las matemáticas sean tan desafiantes para algunos? (…).*

La dificultad de las matemáticas

Una de las razones por la que las matemáticas resultan difíciles es porque requieren un tipo de pensamiento diferente al de muchas otras asignaturas; ***más lógico, sistemático y abstracto****. Esto supone un desafío para los*

[1] "4 recomendaciones para que tus alumnos superen el miedo a las matemáticas" Innovamat Blog. 23 abril 2023. https://blog.innovamat.com/es/recomendaciones-miedo-matematicas/

estudiantes que no se sienten cómodos con este tipo de pensamiento, que no han desarrollado aún habilidades fuertes de resolución de problemas o que presentan dificultades de aprendizaje directamente relacionadas con este tipo de pensamiento, como la discalculia[2].

Otra razón es la estructura jerárquica de las matemáticas, que requiere un aprendizaje muy secuencial: muchos de los nuevos conceptos se construyen sobre los conceptos que le preceden. Esto implica que, si un alumno no adquiere un conocimiento en un momento dado, le puede resultar difícil entender los conceptos que llegan después. Esto puede dar lugar a una sensación de «quedarse atrás» que, prolongada en el tiempo, se vuelve irremediable.

Además, es probable que algunos de estos alumnos desarrollen falta de confianza en sus habilidades matemáticas, lo que puede desencadenar experiencias negativas que no hacen más que alimentar estas inseguridades. (…).

Refuerza las habilidades socioemocionales

*Ayuda a tus alumnos a desarrollar una **actitud positiva** hacia las matemáticas elogiando su*

[2] P**atrón de dificultades que se caracteriza por problemas de procesamiento de la información numérica**, el aprendizaje de operaciones aritméticas y el cálculo correcto y fluido. En definitiva, la dificultad por procesar la información numérica. Muchas veces, los alumnos con discalculia son competentes en otras áreas, pero en el ámbito numérico presentan serias dificultades.

RAMON FERRERES

esfuerzo y progreso en vez de solo su resultado final. Anímalos a perseverar y a no rendirse, y recuérdales que no deben temer al error.

En general, los bloqueos en matemáticas son comunes, pero se pueden superar con la mentalidad y las estrategias correctas. Si fomentas una mentalidad de crecimiento, proporcionas muchas oportunidades de práctica y usas materiales prácticos y ayudas visuales, puedes ayudar a tus alumnos a superar las inseguridades en matemáticas y a disfrutar del aprendizaje. (…).".

Ya hemos visto que las matemáticas presentan dos grandes dificultades: que son abstractas y secuenciales.

La buena noticia es que el pensamiento abstracto se puede cultivar, como las lechugas o las margaritas, mientras que la secuencialidad se puede favorecer con una buena estratégia de pensamiento[3].

Las matemáticas han de ser forzosamente abstractas, puesto que no dejan de ser una herramienta que nos ayuda a describir una parte del mundo. El número 2 implica que hay dos unidades de algo, que son 1 + 1 unidades, por ejemplo, manzanas, que es el ejemplo típico que se usa para explicarnos aritmética, cuando somos niños/as.

[3] Una estratégia es diseñar un conjunto de acciones destinadas para alcanzar un objetivo específico o una meta.

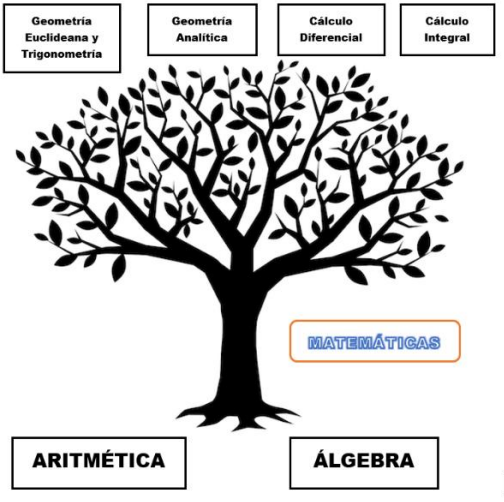
RAMON FERRER I MARÍ

La secuencialidad la podemos definir en seis àreas básicas, siendo la Aritmética y el Álgebra, los cimientos que sostienen a las otras cuatro:

1. Aritmética.
2. Álgebra.
3. Geometría Euclideana y Trigonometría.
4. Geometría Analítica.
5. Cálculo Diferencial.
6. Cálculo Integral.

Las dos primeras, Aritmética y Álgebra, son el a,e,i,o,u, o sea, lo más básico. Es imprescindible obtener un buen dominio sobre esas dos materias o será imposible alcanzar a dominar a las Matemáticas. Las otras cuatro son: La Geometría Euclideana y Trigonometría, la Geometria Analítica, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Por eso he creado la imagen que ilustra la portada de este libro.



El àrbol de las Matemáticas Fuente: Freepik, modificado por Ramon Ferrer i Marí.

RAMON FERRER I MARÍ

Competencia matemática vital: más actitud que contenido[4]

Vamos a suponer que soy una persona normalita, y que no tengo ninguna profesión técnica que me exija tener un nivel alto de Matemáticas, es decir, que no preciso, por ejemplo, conocer el Análisis Matemático como la palma de mi mano.

¿Cuántas Matemáticas preciso saber en mi vida cotidiana?

A esta importante pregunta ha respondido, con la brillantez intelectual a que nos tiene habituados, el gran divulgador matemático Don Miquel Albertí Palmer, profesor del Máster Interuniversitario de Didáctica de las Matemáticas en Barcelona y catedrático de Matemáticas en el INS Vallés de Sabadell. Su respuesta es la que sigue:

"En cuanto a los contenidos, una persona se desenvolverá cómodamente en la vida cotidiana si es capaz de:

1) *Calcular con y sin calculadora y realizar estimaciones razonadas de cálculos.*
2) *Usar la calculadora a nivel elemental.*
3) *Usar con comodidad expresiones numéricas equivalentes (decimal, fracción, porcentaje).*

[4] Miquel Albertí Palmer. Las Matemáticas de la vida cotidiana (2018).

RAMON FERRER I MARI

4) *Usar correctamente instrumentos de medida (regla, balanza, reloj, termómetro).*
5) *Identificar y crear patrones de formación de sucesiones figurativas y numéricas.*
6) *Establecer relaciones de cambio entre variables y representarlas gráficamente, ya sean de origen algebraico (lineales, cuadráticas) o experimental (edad-estatura, masa-importe…).*
7) *Distinguir y nombrar correctamente curvas, figuras y sólidos elementales: segmento, recta, cónicas, cuadriláteros, triángulos, polígonos, poliedros y cuerpos circulares.*
8) *Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y sólidos sencillos.*
9) *Modelizar matemáticamente para visualizar situaciones con figuras geométricas y expresiones algebraicas sencillas.*
10) *Relacionar y distinguir figuras por su forma y orientación espacial o simetría.*
11) *Usar decimales, fracciones y porcentajes para medir la incertidumbre.*
12) *Contar y determinar las características de una población (moda y media aritmética).”*

En el siguiente capítulo desarrollaré lo que el profesor Albertí nos marca que serían los contenidos matemáticos mínimos que nos interesa conocer, para poder desenvolvernos cómodamente en nuestra vida cotidiana. Están todos en este libro.

RAMON FERRER I MARÍ

LAS DOCE PRUEBAS DE "ALBERTíX"

Permítaseme esta pequeña broma blanca, desde el respeto más profundo hacia el profesor Don Miquel Albertí Palmer.

Esta parte es para la persona que, símplemente, pretenda repasar sus conocimientos básicos de matemáticas, para estar en consonáncia con los contenidos propuestos por el insigne Catedrático.

Todos están desarrollados en el libro. Por lo tanto, lo que hago es referirme a las páginas determinadas. En el índice, son los seis temas marcados en amarillo.

Si repasamos los 12 contenidos, veremos que hay unos cuantos que están duplicados. De todos modos, los voy a señalar uno por uno.

"En cuanto a los contenidos, una persona se desenvolverá cómodamente en la vida cotidiana si es capaz de:

1) *Calcular con y sin calculadora y realizar estimaciones razonadas de cálculos.*
2) *Usar la calculadora a nivel elemental.*
3) *Usar con comodidad expresiones numéricas equivalentes (decimal, fracción, porcentaje).*
4) *Usar correctamente instrumentos de medida (regla, balanza, reloj, termómetro).*
5) *Identificar y crear patrones de formación de sucesiones figurativas y numéricas.*

RAMON FERRER I MARÍ

6) *Establecer relaciones de cambio entre variables y representarlas gráficamente, ya sean de origen algebraico (lineales, cuadráticas) o experimental (edad-estatura, masa-importe…).*
7) *Distinguir y nombrar correctamente curvas, figuras y sólidos elementales: segmento, recta, cónicas, cuadriláteros, triángulos, polígonos, poliedros y cuerpos circulares.*
8) *Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y sólidos sencillos.*
9) *Modelizar matemáticamente para visualizar situaciones con figuras geométricas y expresiones algebraicas sencillas.*
10) *Relacionar y distinguir figuras por su forma y orientación espacial o simetría.*
11) *Usar decimales, fracciones y porcentajes para medir la incertidumbre.*
12) *Contar y determinar las características de una población (moda y media aritmética).”*

Como diría el periodista Carles Porta en su serie CRIMS: “Comencemos”.

1) *Calcular con y sin calculadora y realizar estimaciones razonadas de cálculos.*
   Para el tema de Cálculos Repásate los temas llamados LAS 4 REGLAS, NÚMEROS NATURALES y EL PROCESO L.E.D.O.C.

RAMON FERRER I MARÍ

2) *Usar la calculadora a nivel elemental. Existen dos clases de calculadoras, la elemental (izquierda) y la Científica (derecha)*

Sólo recordar para quienes no suelan usarla que, en la calculadora elemental, primero se introduce el número y luego la operación. Así la raíz cuadrada de 25 sería:

En la científica, va al revés, primero la función y después la cantidad.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

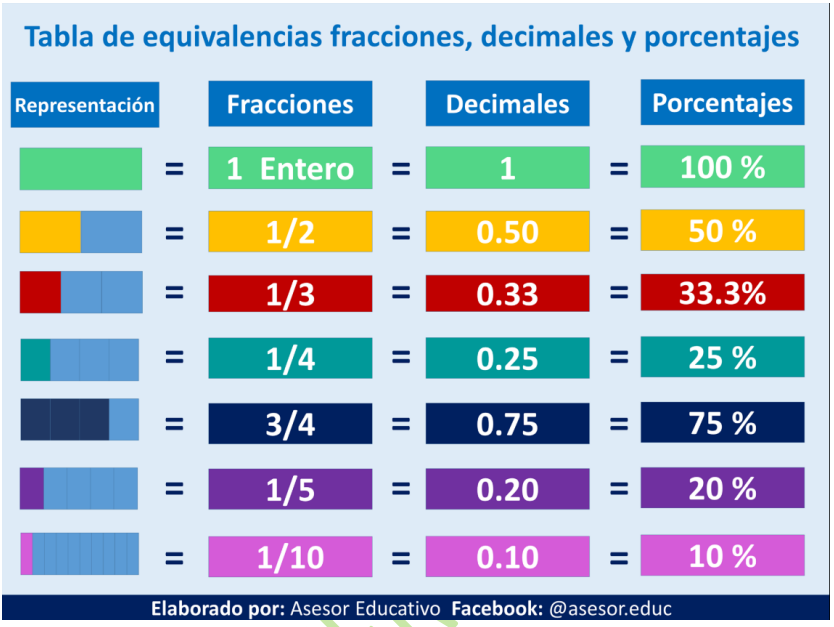
325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

MONFERRER MARÍ

3) *Usar con comodidad expresiones numéricas equivalentes (decimal, fracción, porcentaje).*



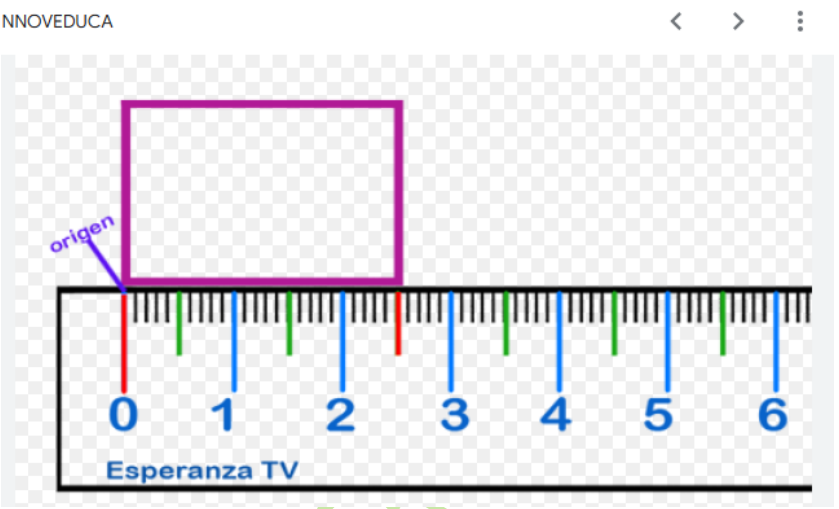
RAMON FER

De este modo $\frac{1}{4} = 25\% = 0{,}25$.

Puedes repasar los temas FRACCIONES, NÚMEROS DECIMALES E IRRACIONALES y ARITMÉTICA DE LAS PROPORCIONES.

4) *Usar correctamente instrumentos de medida (regla, balanza, reloj, termómetro).*

Su funcionamiento es bastante intuitivo y no requiere de mayor explicación. Sólo recordar la regla



5) *Identificar y crear patrones de formación de sucesiones figurativas y numéricas.*

Las sucesiones son importantes porque suelen aparecer en todas las pruebas de razonamiento lógico y matemático, tanto en oposiciones como en pruebas de selección para puestos de trabajo, por ejemplo, Correos de España, Mozo de Almacén etc.

Son el tipo de pregunta más habitual que nos encontraremos en los test psicotécnicos, y consiste, en una secuencia de números, en la

que cada elemento se puede deducir, mediante un proceso lógico o de cálculo matemático.

¿Qué es una sucesión?

Es un conjunto ordenado de elementos que pueden ser números, letras o figuras o una combinación de las anteriores. Estos elementos se caracterizan por seguir una regla de formación y lo que buscaremos en cada uno de los ejercicios es encontrar esa regla de formación.

¿Qué son sucesiones numéricas?
Las sucesiones numéricas, son todos los conjuntos numéricos, cuyos términos obedecen a una ley de formación que nos permite determinar el término que continúa. Denominándose a los elementos de este conjunto "términos de la sucesión".

Ejemplo:

Hallar el número que sigue:

4 ; 8 ; 24 ; 96 ; 480 ; ____

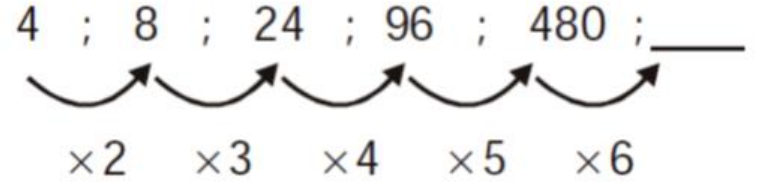
A) 2 800 B) 2 580 C) 2 400 D) 2 880

¿Qué es una ley de formación?

Es el patrón que se va establecer dentro de la sucesión numérica, para determinar de que forma va creciendo o decreciendo, este lo podemos

encontrar comparando uno de los términos con el anterior.

En el ejemplo anterior, al momento de realizar la comparación, se puede apreciar que la ley de formación sería x2; x3; x4; x5.



Por lo tanto, la respuesta sería: 480 x 6 = 2880.

¿Cómo resolver sucesiones numéricas?

Lo primero será, encontrar el patrón de formación en la secuencia mostrada.

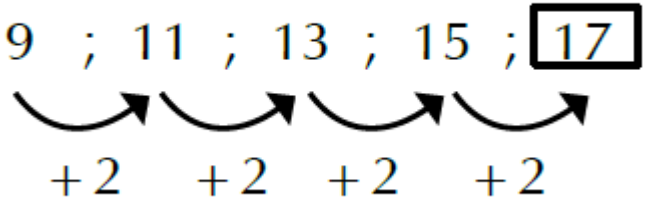
Las formas para hacerlo, pueden ser muchas, pero se estila realizar algunas pruebas empezando por una suma si es que la sucesión va creciendo o por medio de una diferencia si es que estuviera decreciendo.

Para explicarlo mejor, vamos a segmentar los tipos de sucesiones numéricas que existen:

Sucesiones numéricas aritméticas
Son aquellas en donde la ley de formación se encuentra, por medio de una suma o una resta.

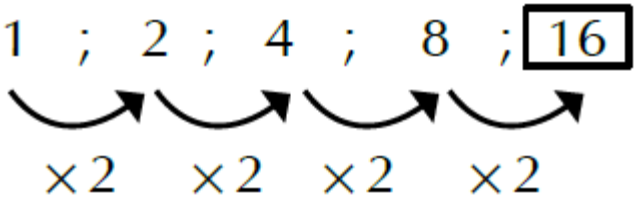
RAMON FERRER I MA...

Ejemplo:



Sucesiones numéricas geométricas
Son aquellas en donde la ley de formación, la podemos encontrar mediante una multiplicación o división de dos cantidades.

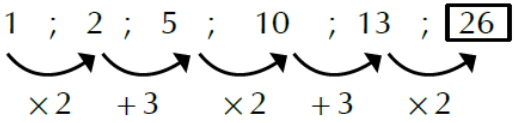
Ejemplo:

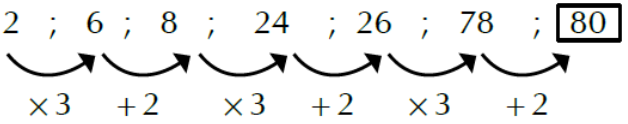


Sucesiones numéricas combinadas
Son aquellas en donde intervienen una mezcla de las dos anteriores, no solamente se puede tener como ley de formación una sucesión aritmética, sino adicionarle la geométrica también.

Son las más complicadas de resolver, ya que toca ir probando combinaciones hasta dar con la correcta.

Ejemplo:

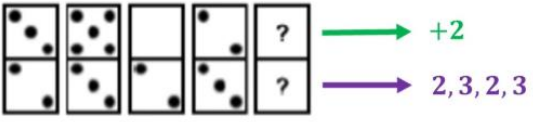


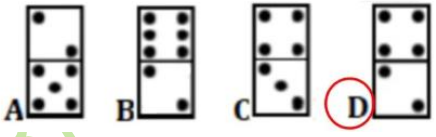


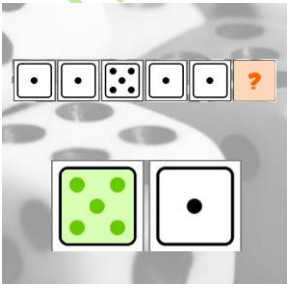
Por lo que al aspecto que pueden tener, puede ir desde lo más formal que ya hemos visto, a ir "disfrazadas" de fichas de dominó, dados o cualquier otra.

Secuencia de fichas de dominó

Determina la ficha de dominó que completa la sucesión.







La respuesta es .

6) *Establecer relaciones de cambio entre variables y representarlas gráficamente, ya sean de origen algebraico (lineales, cuadráticas) o experimental (edad-estatura, masa-importe…). → Ver páginas 425 a 427 y GEOMETRIA ANALÍTICA DE LA RECTA.*

7) *Distinguir y nombrar correctamente curvas, figuras y sólidos elementales: segmento, recta, cónicas, cuadriláteros, triángulos, polígonos, poliedros y cuerpos circulares. → Ver páginas 193 a 197.*

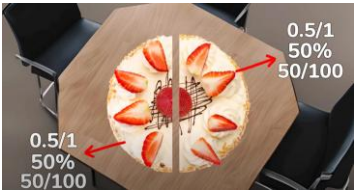
8) *Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y sólidos sencillos. → Ver páginas Ver páginas 173 a 182, y 196 a 197.*

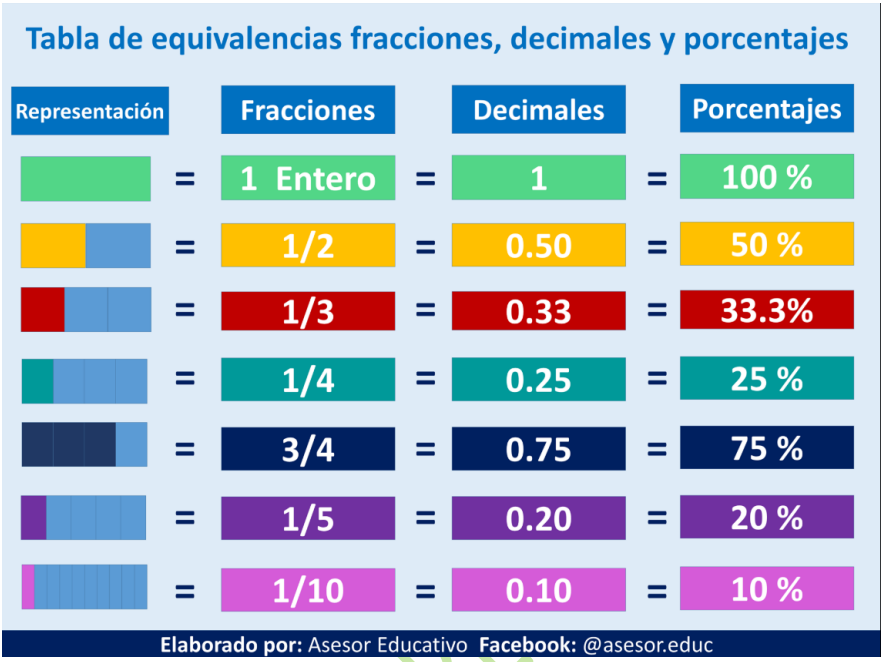
9) *Modelizar matemáticamente para visualizar situaciones con figuras geométricas y expresiones algebraicas sencillas. → Ver páginas 284 a 319, 426 a 427 y GEOMETRIA ANALÍTICA DE LA RECTA.*

10) *Relacionar y distinguir figuras por su forma y orientación espacial o simetría. → Ver páginas 196 y 197.*

11) *Usar fracciones, decimales y porcentajes para medir la incertidumbre.*

RAMON FERRER I MARÍ





RAMON FERRE

El por qué de tener tres tipos de operaciones para medir la incertidumbre, se basa en la complejidad y visualidad del dato que queremos exponer.

Para repartir algo que vemos y tocamos, como la tarta de nata y fresa, es mejor recurrir a las fracciones.

Si queremos dar un dato y no tenemos forma gráfica de mostrarlo, es más práctico hablar de un 70% que dar el decimal 0,70, o la fracción $\frac{2,8}{4}$

Puedes repasar los temas FRACCIONES, NÚMEROS DECIMALES E IRRACIONALES y ARITMÉTICA DE LAS PROPORCIONES.

12) Contar y determinar las características de una población (moda y media aritmética).”

Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la **media** es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6. La **moda** es: 5. La **mediana** es 5
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad.	
Moda	El valor que más se repite.	

Con la Mediana existe una particularidad. En el ejemplo han puesto una muestra de 5 números, es decir una cantidad impar.

Si la muestra de números fuese una cantidad par, tomaremos las dos cifras centrales y las dividiremos entre dos.

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?

Si tiramos de diccionario, el de la RAE específicamente, nos da la siguiente definición:

"*Matemática. F. Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.*"

A ver, como definición, queda muy molona y tampoco podemos pedir más. Pero vayamos un poco más allá.

Si intento quintaesenciar, es decir, reducir a la explicación más sencilla posible, una de las características o razones de existencia de las matematicas, ésta es la de averiguar un *dato*[5] que desconocemos, al que llamamos *incógnita*[6], a base de realizar alguna manipulación a la que llamaremos *operación*[7] con, al menos, otros dos *datos* que sí conocemos.

Ejemplo: ¿Cuál es el resultado (*incógnita*) de la suma (*operación*) de 6+4 (*datos*)?. Pues si sumamos 6+4 nos dá como resultado de la incógnita el número natural 10.

¿Y por qué los humanos nos metimos en éste berenjenal?

RAMON FERRI MARÍ

---

[5] Información sobre algo concreto que permite su conocimiento exacto o sirve para deducir las consecuencias derivadas de un hecho.

[6] Cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema para resolverlos. Diccionario RAE.

[7] Acción, maniobra o conjunto de acciones destinadas a obtener un resultado concreto.

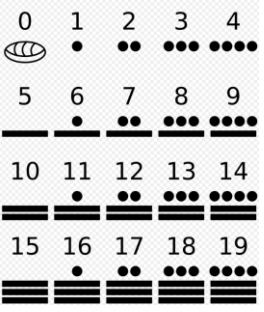
Pues por curiosidad y sentido práctico. Desde muy antiguo hemos tenido la necesidad natural de saber cuántos miembros de la tribu éramos, cuántos trozos de carne teníamos para repartir y cuántas bayas y frutos silvestres habían recogido las mujeres.

Imagina que tenemos tres trozos de carne y hemos de informar al jefe de la tribu, que está en la otra punta del valle… A ver cómo se lo decimos si, primero, no desarrollamos un sistema numérico.

Así que, para esas primeras representaciones, el ser humano echó mano de lo que tenía… y lo más fácil eran los dedos de las manos, por eso nuestro sistema numérico es decimal, es decir, que lo contamos todo, de diez en diez. A eso le llamamos Base 10.

Sistemas de numeración ha habido bastantes a lo largo de la historia y del planeta. Veamos algunos ejemplos:

En la América prehispánica tenemos el sistema Maya, sobre base 5.



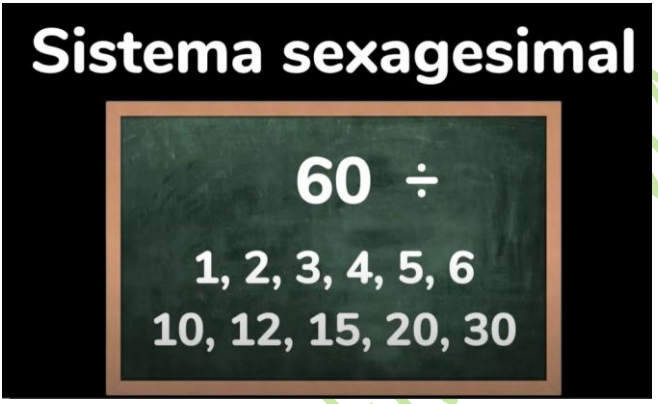
Sistema de numeración Maya. Original: Neuromancer2K4 Vector: Bryan Derksen

RAMON FERRER I MARÍ

En el antiguo Egipto tenían uno en Base 10 y en la cuna de la civilización, Babilonia lo tenían en Base 60, por poner sólo tres ejemplos.

¿Y por qué en Base 60?... A ver, no era por capricho, porque tiene su lógica:

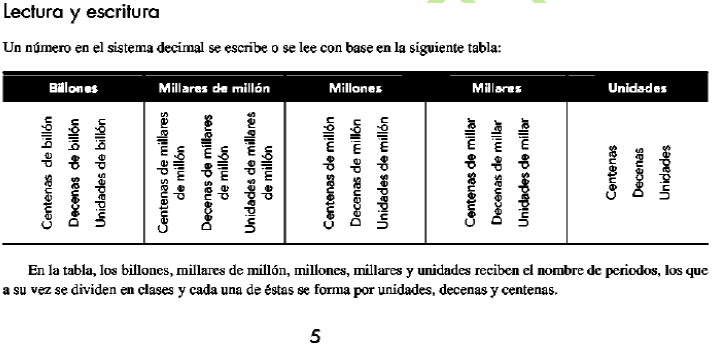
El 60 es divisible entre 11 números diferentes, como vemos a continuación



Y en nuestro sistema numèrico actual, contamos las horas y los grados de 60 en 60, tal y como lo hacían ellos.

Respecto a la representación gráfica de los números, hacemos servir el sistema indoarábigo, tambíen en Base 10, que tiene la ventaja de representar cada número, del 1 al 9 con un solo símbolo, e incorpora el cero como elemento neutro. Y permite ampliar las cantidades hasta el infinito, con sólo ir añadiendo números por delante o por detrás:

Si al 5 le añadimos un 7 por delante pasamos a tener 75 elementos y si le ponemos tres ceros por detrás, ahora tenemos el número 75000 (setenta y cinco mil)… Fácil ¿No?



Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

5

Fuente: Matemáticas Simplificadas. CONAMAT de México. Página 5.

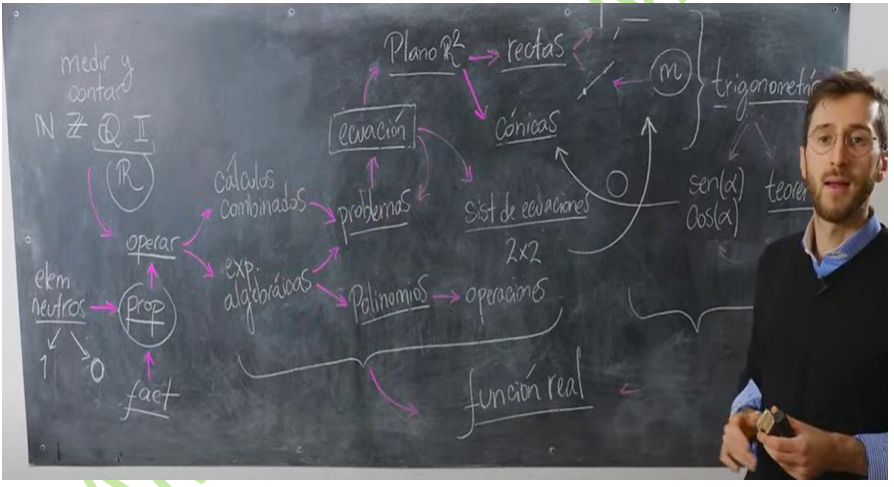
En el siguiente capítulo vamos a tomar conciéncia del hecho que, en matemáticas, todo está interconectado y se requiere una buena base en Aritmética y Álgebra, para poder avanzar.

Ejemplo: Para poder resolver una derivada (Cálculo Diferencial) en la que aparecen fracciones, antes, debemos saber operar con fracciones (Aritmética).

$$x^{5/2} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

UNA HOJA DE RUTA O MAPA PARA APRENDER MATEMÁTICAS.

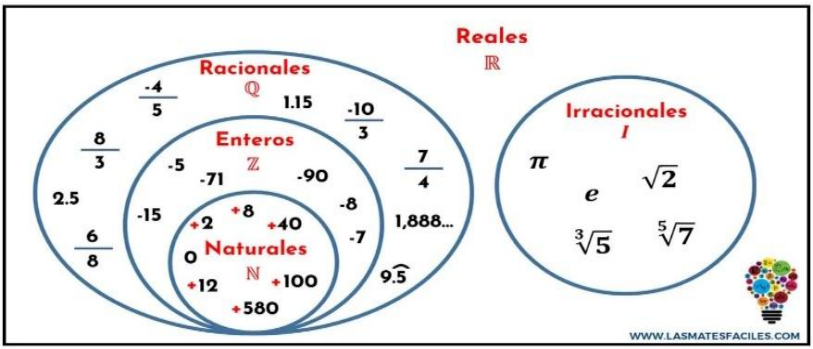
El Traductor de Ingeniería, Damián Pedraza, nos propone esta hoja de ruta para aprender matemáticas, resumen de la E.S.O. y Bachillerato[8]. Su intención no es que te asustes o te abrumes. Su deseo (y el mío, por eso lo pongo) es que te des cuenta que, en las Ciéncias Exactas, todo está conectado y es interdependiente.



Damián Pedraza parte del hecho que las matemáticas se inventaron para cubrir una necesidad humana como era la de medir y contar los elementos que rodeaban a nuestros ancestros, es decir generar una sensación de control del

[8] Faltaría sólamente el tema de las Inecuaciones y la parte de Probabilidad y Estadística. Pero como resúmen interconectado, es excelente.

entorno. Los diferentes conjuntos numéricos son estos:



El conjunto de los números reales está formado por otros números como los naturales, enteros, racionales e irracionales.

Los naturales son aquellos que el hombre inventó primero. Serían el 0,1,2,3,4,5,6…

Los enteros serían todos los naturales a los que añadimos los negativos por el otro extremo del cero …-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5…

Los racionales son aquellos números que pueden representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

O dicho en cristiano, se expresan en forma de quebrado, siempre que el número de abajo sea diferente de cero, en cuyo caso, tanto en aritmética como en álgebra, se conoce como "indefinido" o como "infinito"

$\frac{1}{2} - \frac{9}{4} \ldots$ $\frac{2}{0}$ = indefinido o infinito

Con estos conjuntos de números procedemos a OPERAR con ellos, aplicándoles las propiedades que tienen.

Ejemplos:

Matemáticatuya.com	Suma	Multiplicación
Conmutativa	$a+b=b+a$ **Ejemplo** $3+5=5+3$	$a \cdot b = b \cdot a$ *El orden de los factores no altera el producto*
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$ *Si al primer número le agregamos la suma de los dos últimos se obtiene el mismo resultado que sumar los dos primeros y luego adicionarle el último.*	$(ab)c = a(bc)$ **Ejemplo** $(27 \cdot 5) \cdot 2 = 27 \cdot (5 \cdot 2)$ El lado derecho es más fácil de calcular
Elemento neutro	0 es el elemento neutro de la suma, pues $a+0=a$ *Si a, un número real ,se le suma el elemento neutro de la suma, el número no se altera*	1 es el elemento neutro de la multiplicación, pues $a \cdot 1 = a$
Existencia del inverso	El inverso aditivo u opuesto de a es denotado por $-a$ $a+(-a)=0$ **Ejemplo** El opuesto de -3 *es* 3 pues $-3+3=0$	El inverso multiplicativo o recíproco de $a(\neq 0)$ es denotado por a^{-1}, también por $\frac{1}{a}$ $a \cdot a^{-1}=1$ El 0 no tiene inverso
Distributiva	$a(b+c)=ab+ac$ **Ejemplo** Calcular $5(2000+80)$ usando la propiedad distributiva. **Solución** $5(2000+80)=5 \cdot 2000+5 \cdot 80=10.000+400=10.400$ **Ejemplo** Calcular $13 \cdot 25+13 \cdot 15$ usando la propiedad distributiva (Factor común 13) **Solución** Se tiene el lado derecha, se lleva a la forma izquierda. Se dice que se saca 13 de factor común $13 \cdot 25+13 \cdot 15=13(25+15)=13 \cdot 40=520$	

RAMON FERRERI MARÍ

FACTORIZACIÓN

Para **factorizar** un **número** o **descomponerlo en factores** efectuamos sucesivas divisiones entre sus divisores primos hasta **obtener** un uno como cociente.

Para realizar las divisiones utilizaremos una **barra vertical**, a la **derecha escribimos los divisores primos** y a la **izquierda los cocientes**.

Ejemplos:

Factorizar 2520

Como el número termina en cifra par es divisible por 2, colocamos el 2 a la derecha de la raya

Dividimos 2520 por 2 y lo colocamos a la izquierda

```
2520|2
1260|
```

1260 termina en 0, por tanto también es divisible por 2, colocamos el 2 a la derecha de la raya

Dividimos 1260 por 2 y lo colocamos a la izquierda

```
2520|2
1260|2
 630|
```

630 termina en 0, por tanto también es divisible por 2, colocamos el 2 a la derecha de la raya

Dividimos 630 por 2 y lo colocamos a la izquierda

```
2520|2
1260|2
 630|2
 315|
```

RAMON FERRER I MARÍ

Como no to termina en cifra par ni en 0 no es divisible por 2, entonces probamos por 3. La suma de las cifras de 315 es igual a 9 que divisible por 3. Colocamos el 3 a la derecha de la raya

Dividimos 315 por 3 y lo colocamos a la izquierda

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	

Volvemos a probar por 3. La suma de las cifras de 105 es igual a 6 que divisible por 3. Colocamos el 3 a la derecha de la raya

Dividimos 105 por 3 y lo colocamos a la izquierda

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	

Volvemos a probar por 3. La suma de las cifras de 35 es igual a 8 que no es divisible por 3, por tanto tenemos que probar por el siguiente número primo que es 5, como 35 termina en 5 es divisible entre 5. Colocamos el 5 a la derecha de la raya

Dividimos 35 por 5 y lo colocamos a la izquierda

RAMON FERRER I MARÍ

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	

7 es un número primo, por tanto es divisible por sí mismo. Colocamos el 7 a la derecha de la raya

Dividimos 7 por 7 y lo colocamos a la izquierda

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Una vez que llegamos a 1 termina la factorización

Como a la derecha tenemos el 2 repetido tres veces, el 3 repetido dos veces, el 5 y el 7; la factorización será:

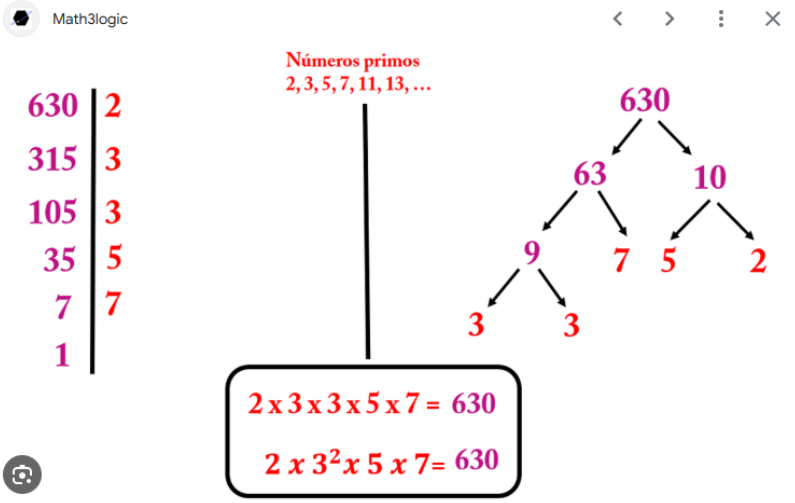
$520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

RAMON FERRER I MARÍ

Factorizar 432

432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$432 = 2^4 \cdot 3^3$



Números primos: Es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores positivos distintos: él mismo y el 1.

Los más habituales en factorización son 2, 3, 5, 7, 11,13…

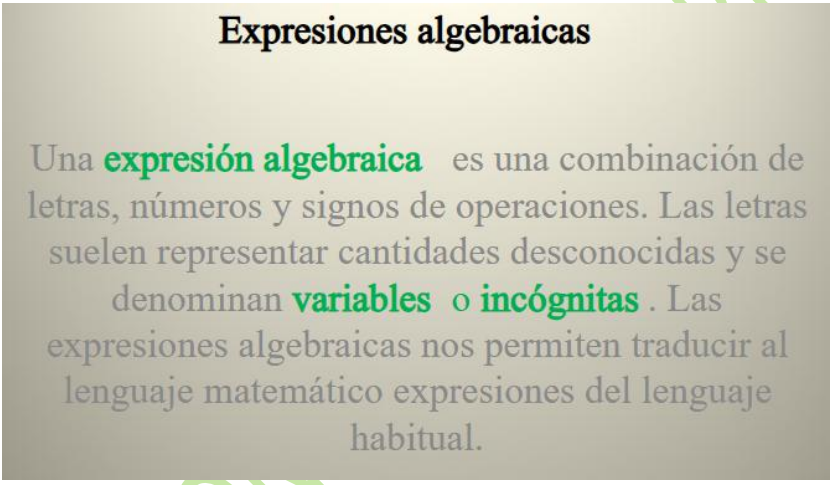
Podemos operar usándo sólo números y estaríamos haciendo Aritmética,

26 + 14 = 40 240 - 35 = 205

135 * 5 = 675 64/16 = 4

o podemos operar números y letras, llamadas incógnitas y estaríamos en el mundo del Álgebra.

x + 4 =6 → x = 6 – 4 → x = 2



La ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebráicas. Estas expresiones pueden ser dos polinomios, los cuales se plantea una relación entre sí.

En el ejemplo anterior la ecuación es x + 4 =6.

Mientras que el polinomio es una expresión que expresa el comportamiento de una variable, este polinomio puede ser expresado de distinta manera.

En el ejemplo anterior el polinomio es x + 4

Por tanto, la ecuación es una igualdad y el polinomio un comportamiento.

Definición de un polinomio

- **Polinomio en una variable:** Una expresión algebraica que solamente contiene términos de la forma ax^k donde **a** es cualquier numero real y k es un entero no negativo.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde $a_n \neq 0$. El polinomio es de grado n, y a a_n se le denomina coeficiente principal. a_0 es el termino constante.

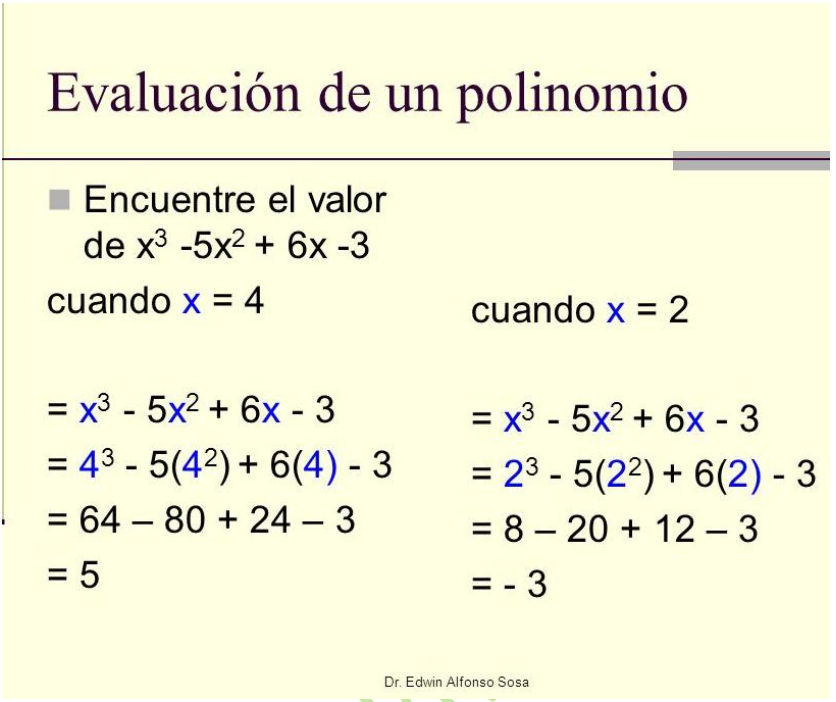
Dr. Edwin Alfonso Sosa 4

No son polinomios

No negativo

- $2x^{-1} + 5$
- $X^3 + 3\,x^{1/2}$ — No es un entero
- No cumplen con las condiciones

Dr. Edwin Alfonso Sosa



Palabrotas matemáticas: **Evaluar** es sinónimo de **Calcular.**

En el ejemplo anterior, hemos evaluado (=Calculado el valor) el polinomio para el valor x=4, con el resultado de 5, y para el valor x=2, el resultado de -3.

Volviendo a las ecuaciones y su contraparte, las inecuaciones, es importantísimo tener por la mano los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
→ Ver página 254.

Si las ecuaciones las pasamos al Plano de los números reales en dos dimensiones, tenemos el plano cartesiano. Con lo que se pueden representar como gráficas. → Página 400

El estudio de los conjuntos de lineas rectas nos dá la Trigonometría, puesto que cualquier figura realizada con lineas rectas se puede descomponer en una serie de triángulos. Por ejemplo, Un hexagrama o Estrella de David, se puede descomponer en varios triángulos.

La trigonometría dispone de sus própias leyes, llamadas *teoremas*[9], entre las que destacan el teoréma de Pitágoras y los teoremas del Seno y del Coseno, que también sirven para el estudio de las figuras cónicas. → Página 171

Finalmente, si juntamos todos estos conocimientos, que están interconectados y son interdependientes, nos plantamos a las puertas del Análisis Matemático con el tema de las Funciones Reales de Variable Real. → Página 273.

[9] Un teorema es una proposición cuya verdad se demuestra. En matemáticas, es toda proposición que, partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una racionabilidad (tesis) no evidente por sí misma.

RAMON FERRE MARÍ

LAS “CUATRO REGLAS” DE LA ARITMÉTICA: SUMAR, RESTAR, MULTIPLICAR Y DIVIDIR.

Así se han conocido tradicionalmente a las operaciones básicas de la aritmética. De hecho durante siglos, la formación más elemental que recibían nuestros antepasados se basaba en enseñarles éstas cuatro reglas, con más habilidades de lectoescritura (en cristiano, que supieran leer y escribir, ni que fuera con un montón de faltas de ortografía…). Recordemos que, durante la Edad Media, el analfabetismo era la regla, y no la excepción, en Europa.

Cuando se trata de ir añadiendo elementos, inventó la **suma**. Técnicamente se define como “*la operación que tiene por objeto reunir las unidades de varios conjuntos en uno único*”.

Os dejo una tabla de sumas, donde el resultado se obtiene mediante cruzar filas y columnas.

De éste modo, si queremos saber cuanto es la suma de 9 y 7, tomamos el 9 de la zona de columnas (la numeración de arriba) y lo cruzamos con el 7 que aparece en la zona de filas (la numeración de más a la izquierda) y el resultado que nos dá es 16.

RAMON FERRER I MARÍ

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fuente: es.tableworld.net Tablas Online.

Vale, todo esto está muy bien y funciona de coña cuando se trata de ir añadiendo elementos, ¿Pero qué hacemos si, en lugar de añadir elementos, queremos quitarlos? ¿Y cómo narices lo hacemos para describir la situación en la que no tenemos ningún elemento?.

Pues para ello, aparte de la operación de la resta, hubo que inventar los números negativos: …-5,-4,-3,-2,-1. Y para la situación en la que no hay ningún elemento se inventó el 0 (cero).

Os dejo un recorte de Matemáticas Simplificadas del CONAMAT de México. Página 4 donde lo explican y amplían mejor que yo.

RAMON FERRER I M

Clasificación

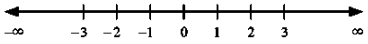
El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1, 2, 3, 4, 5,…, a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de 2 números enteros, con el divisor distinto de cero, ejemplo: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{6}{1}, -\frac{8}{2}, \ldots$

Aquellos números que no es posible expresar como el cociente de 2 números enteros, se conocen como números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{81}, \pi, \ldots$

Al unir los números anteriores se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.



La **resta** es la operación inversa a la suma:

$$y - b = z \qquad 5 - 2 = 3$$

donde "y" se llama *Minuendo*, "b" se llama *sustraendo* y el resultado "c" se denomina *diferencia.*

El resultado puede dar un numero positivo o uno negativo, caso que el sustraendo sea un numero mayor que el minuendo

$$7 - 9 = -2$$

Otra manera de definir la resta es decir que es la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo

$$y + (- b) = z \qquad 5 + (- 2) = 3$$

La regla de los signos del producto de los números enteros y racionales se sigue manteniendo con los números reales. En general, si multiplicamos signos iguales nos dá la el signo positivo (+), es decir

RAMON FERRER I V...

$$(+) * (+) = (+) \quad +2 * +2 = +4$$

$$(-) * (-) = (+) \quad -2 * -2 = +4$$

Mientras que si multiplicamos signos diferentes, nos dá el signo negativo (-), es decir

$$(+) * (-) = (-) \quad +2 * -3 = -6$$

$$(-) * (+) = (-) \quad -5 * +2 = -10$$

La **multiplicación** es el acto de sumar varias veces la misma cantidad, o sea, Una multiplicación se puede definir como una sucesión de sumas. En este caso, sumaremos el número A entre sí, B número de veces

A x B = A + A + A … B número de veces

Así pues si multiplicamos 3 x 2, lo que estamos haciendo es sumar dos veces el número tres.

3 x 2 = 3 + 3 = 6

Os dejo una tabla que sirve para hallar las multiplicaciones y que sigue los mismos princípios operativos que la de la suma.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fuente: Educando en la diversidad. https://educandoenladiversidad-gomi.blogspot.com/2012/04/los-acnees-y-las-tablas-de-multiplicar.html.

De su observación podemos deducir tres cosas:

a) Tabla del 0. Todo número multiplicado por 0 es 0.
b) Tabla del 1. Todo número multiplicado por 1 es ese mismo número. 5x1=5.
c) Tabla del 10. Sólo hay que añadir un 0 por la derecha, al número que multiplicamos. 5x10=50.

La **división** es la cuarta y última regla aritmética y la podemos definir como la acción de repartir una entidad, entre cierto número de elementos. Así pues, tenemos una entidad, llamada Dividendo (el número 24) que repartimos entre cierto número

de elementos Divisor (el número 12) y cuyo resultado se llama Cociente (el número 2). Si multiplicamos el Cociente por el Divisor, regresaremos al Dividendo.

En cristiano, que es la operación inversa a la multiplicación. A ver si esto deja las cosas más claras:

24 ÷ 12 = 2 porque es la operación inversa, de hacer 12 x 2 = 24.

Dividendo	Divisor
	Cociente

24	12
00	2

Dicho de otro modo, **Una división se puede definir como una sucesión de restas**. En el ejemplo anterior:

1ª resta: 24 - 12= 12

2ª resta: 12 - 12= 0

Por lo que 24 ÷ 12=2 porque hemos necesitado 2 restas sucesivas para llegar a 0.

Los números reales, a los que hemos representado en la recta númérica, tienen ciertas propiedades. Definimos propiedad según la RAE, siendo ésta: "*Atributo o cualidad esencial de alguien o algo*."

En los números reales éstos atributos o cualidades esenciales son las siguientes seis:

Propiedad Interna

Cuando se suman o multiplican dos números reales el resultado que se obtiene es otro número real.

2 + 7 = 9 El núm. Real 2 sumado al núm. Real 7 da el núm. Real 9.

Propiedad Asociativa

El modo en que se agrupen elementos a sumar no influye en el resultado de una suma. Y lo mismo pasa en el caso de una multiplicación.

a + (b + c) = (a + b) + c Ej. 5 + (2 + 3) = (5 + 2) + 3.

a x (b x c) = (a x b) x c Ej. 5 x (2 x 3) = (5 x 2) x 3.

Como puedes ver, los agrupes como los agrupes, la suma del ejemplo da 10, mientras que la multiplicación del otro ejemplo da 30.

Propiedad Conmutativa

Tanto la suma como la multiplicación de números reales cumplen con la propiedad conmutativa que indica que el orden no varía el resultado.

a + b = b + a a x b = b x a

Elemento neutro

En la suma el cero se convierte en el elemento neutro pues cualquier número que se sume con el 0 va a dar como resultado el mismo número.
a + 0 = a 5 + 0 = 5

En cuanto a la multiplicación, el elemento neutro en los números reales es el 1, ya que cualquier número real que se multiplique por 1 da lugar al mismo número.

a x 1 = a 5 x 1 = 5

Elemento opuesto

Caso que al sumar dos números reales se obtenga cero, se dice que esos números son opuestos. a – a = 0 8 - 8 = 0.

En la multiplicación el elemento opuesto se da al multiplicar un número por su inverso, con lo que el resultado siempre es la unidad.

Ejemplo $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

Propiedad Distributiva

El producto de un número real por una suma de números reales es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

a x (b + c) = a x b + a x c

Al proceso inverso de la propiedad distributiva se le conoce como sacar el factor común.

a x b + a x c = a x (b + c).

Resumiendo: El conjunto de los números reales está formado por otros números como los naturales, enteros, racionales e irracionales.

Los naturales son aquellos que el hombre inventó primero. Serían el 0,1,2,3,4,5,6…

Los enteros serían todos los naturales a los que añadimos los negativos por el otro extremo del cero …-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5…

Los racionales son aquellos números que pueden representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

O dicho en cristiano, se expresan en forma de quebrado, siempre que el número de abajo sea

diferente de cero, en cuyo caso, tanto en aritmética como en álgebra, se conoce como "indefinido" o como "infinito"

$\frac{1}{2} - \frac{9}{4}$ ... $\frac{2}{0}$ = indefinido o infinito

¿Y por qué un número dividido entre cero da indefinido o infinito?

Una operación de división se puede definir como el acto de repartir una cantidad de algo, lo que sea entre una cantidad arbitraria de otra cosa.

Por ejemplo, el primer día tenemos 10 naranjas y dos chicas, que se llaman Rosa y Laura. Si las repartimos (dividimos), resulta que tocan a cinco unidades para cada una.

Al segundo día sólo viene Laura, así que al dividir 10 naranjas entre una persona… resulta que Laura se las queda todas.

Al tercer día, no viene ninguna chica, con lo que vamos a dividir 10 naranjas entre cero personas.

¿Cómo narices vas a dividir algo, si no hay nadie para repartir?

No tiene sentido, pero las matemáticas no siempre hablan de *Citrus sinensis* (naranjas) y personas.

Desarrollemos el ejemplo de Rosa y Laura, pero en genérico, es decir, sin naranjas y sin las chicas.

Una división se puede definir como una sucesión de restas, tal y como hemos explicado en la página 31.

Decíamos que 10 dividido entre 2 es igual a 5. Vamos a realizar una sucesión de restas hasta que nos dé cero.

1ª resta → 10–2 = 8

2ª resta → 8–2 = 6

3ª resta → 6–2 = 4

4ª resta → 4–2 = 2

5ª resta → 2–2=0

¿Cuántas restas hemos hecho? pues cinco.

Ahora vamos a dividir 10 entre cero haciendo otra sucesión de restas:

1ª resta → 10–0 = 10

2ª resta → 10–0 = 10

3ª resta → 10–0 = 10…

Como puedes ver, no tiene ningún sentido continuar, porque siempre nos da el mismo resultado.

Es decir, **podemos hacer infinitas restas** sin llegar jamás a alcanzar al número cero.[10]

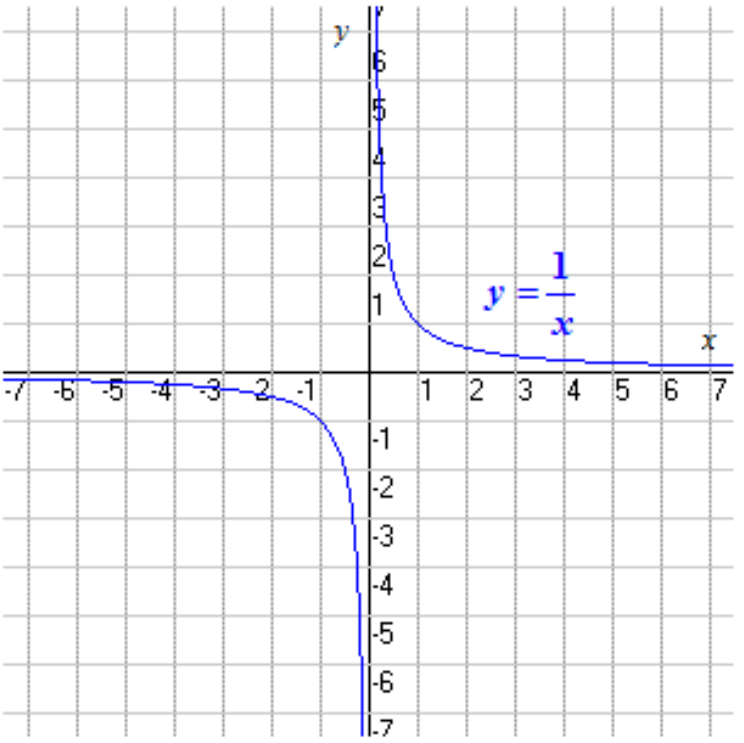
Veámoslo de forma gráfica: Creamos una tabla de valores de 0 a 7 y luego saltemos a valor un millón, respecto de $\frac{1}{x}$ y de $-\frac{1}{x}$ a ver qué pasa:

Valores	1/x	- 1/x
0	∞	-∞
1	1	-1
2	0,5	-0,5
3	0,3	-0,3
4	0,25	-0,25
5	0,20	-0,20
6	0,16	-0,16
7	0,14	-0,14
1.000.000	0.000001	-0.000001

Si lo representamos en una gráfica, queda tal que así:

RAMON TERRERI MARÍ

[10] Quédate con éste concepto, que será muy importante para la parte de Análisis Matemático.



Con lo que vemos que, demos el valor que demos a X, jamás será 0, por mucho que nos aproximemos.

VA DE ALGORITMOS: OAOA FRENTE ATOA.

Aunque el título suene más a una pelea entre luchadores de Wrestling, tipo *Sakudo Kastaña vs. Siscu "El Leñador"*, lo real es que un algoritmo es el Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. Específicamente en matemáticas es el Método y notación en las distintas formas del cálculo.

A la manera tradicional de enseñar matemáticas se le llama ATOA (Algoritmos Tradicionales en Operaciones Aritméticas).

El descontento de algunos educadores con esta manera tradicional de enseñanza, por los niveles de fracaso escolar que crean entre alumnos con dificultades o con discalculia, llevó a desarrollar el método OAOA (Otros Algoritmos en Operaciones Aritméticas).

Si eres papá o mamá en España, te vas a encontrar que tu hijo/a de Primária te va a decir que, en la escuela, le enseñan Aritmética de una manera muy diferente a la que tuvimos que aprenderla nosotros.

Para explicar el por qué de ese cambio, voy a reproducir las Conclusiones del estudio "**Análisis de la eficiencia del movimiento OAOA" (1).**

(Te dejo subrayadas las ideas principales).

"En última instancia, al reflexionar sobre el objetivo general de este estudio, que se centró en analizar la efectividad de la OAOA en comparación

RAMON FERRER I MARÍ

con los algoritmos ATOA para abordar las operaciones aritméticas básicas, es esencial destacar que la verdadera relevancia de nuestra investigación radica en una perspectiva más profunda que simplemente probar la obtención de mejores resultados de un método sobre otro. Si bien se ha comprobado que el OAOA logra esos mejores resultados, no podemos pasar por alto el hecho de que el ATOA también demuestra ser efectivo y válido. Lo que este estudio ha revelado de manera significativa es que la diferencia principal entre estos enfoques radica en la naturaleza inclusiva del OAOA y su capacidad para adaptarse a un espectro más amplio de estudiantes, incluyendo a aquellos que no se ajustan a un perfil normativo en el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, como argumenta Martín (2022), el OAOA brinda a las matemáticas un enfoque personalizado que se adapta a las preferencias cognitivas individuales de cada estudiante, reconociendo que un solo método no puede satisfacer las diversas necesidades presentes en el aula. Este hallazgo resalta la importancia de proporcionar a los educadores las herramientas necesarias para fomentar la construcción del conocimiento de manera más efectiva y equitativa en el entorno educativo. En resumen, este estudio no solo ha demostrado la eficacia de la OAOA, sino que también ha subrayado la necesidad de considerar la inclusividad y la adaptabilidad en la enseñanza de las matemáticas como un medio para promover el éxito académico y emocional de un amplio espectro de estudiantes".

(1)

Ana Custodio[1], Ismael Cabero[2]

[1] Universidad Jaume I *al384338@uji.es*
[2] Universidad Jaume I *icabero@uji.es*

Revista de Investigación en Educación, 2023, 21(3), 432-450
DOI: https://doi.org/10.35869/reined.v21i3.4980
https://revistas.webs.uvigo.es/index.php/reined
ISSN 1697-5200 | e-ISSN 2172-3427

Explicado esto, vamos a ver de qué manera lo hacen con el OAOA.

¿Recuerdas este cuadro que vimos antes?

Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

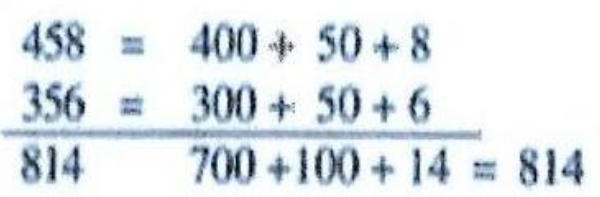
En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

5

Fuente: Matemáticas Simplificadas. CONAMAT de México. Página 5.

El OAOA se basa en descomponer las cantidades a operar entre unidades, decenas y centenas.

Así pues la SUMA queda así:



La RESTA la operan así:

475 → 400 70 5

-158 → -100 -50 -8

317 300 20 -3 = 317

17

La MULTIPLICACIÓN va de estas maneras:

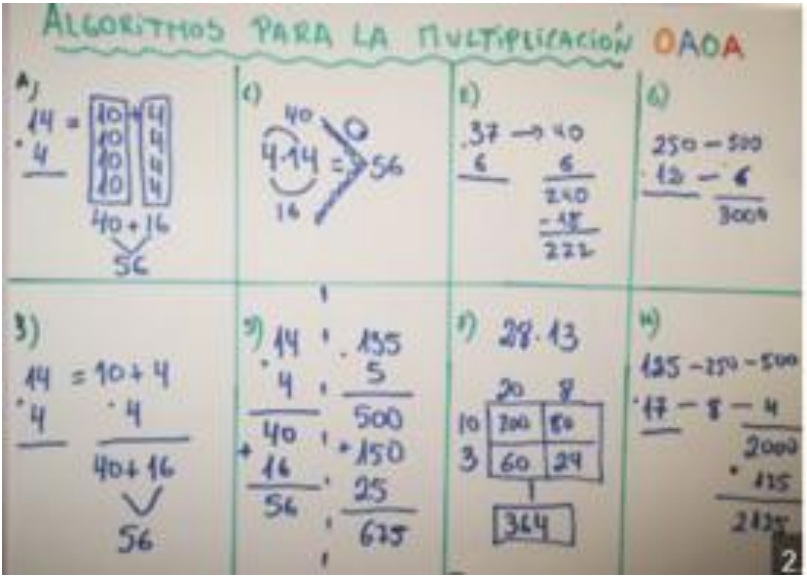
475 → 400 70 5

x 2 → 400 70 5

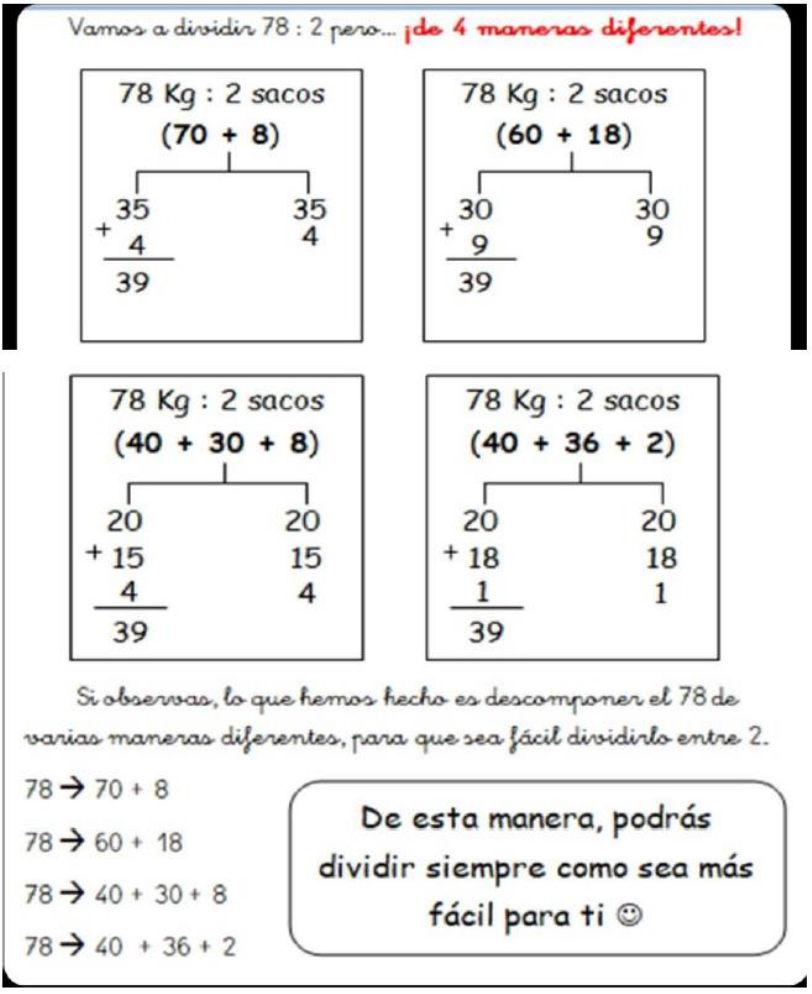
950 800 140 10 = 950

14	10	+	4		
x 4	10	+	4		
56	10	+	4		
	10	+	4		
	40	+	16	=	56

Ocho formas diferentes de operar la multiplicación según el algoritmo OAOA.



Y la siempre complicada DIVISIÓN va así:



Puedes ampliar conocimientos viendo vídeos de YouTube, puesto que esto no es más que una simple introducción.

Uso de los paréntesis

Los paréntesis son usados en todas las ramas de la matemática, aprender a usarlos correctamente es indispensable para comprenderla.

Cuando realizamos operaciones entre números, **los paréntesis determinan el orden y la prioridad de unas sobre otras**. Por ejemplo, en la expresión, primero se deben realizar las operaciones de dentro de los paréntesis, y Luego debemos efectuar la resta. Por lo tanto, encontramos que el resultado de toda la expresión es cuatro:

$$\begin{aligned} &(9+2)-(1+6) \\ =&11-7 \\ =&4 \end{aligned}$$

No obtendremos el mismo resultado si hacemos las operaciones en otro orden, veamos un ejemplo. Fíjate que los números y los signos de suma y resta están en el mismo orden que en el párrafo de arriba, lo único que está cambiando es la disposición de los paréntesis.
Notarás que hay unos paréntesis contenidos en otros, en este caso el paréntesis está dentro de

uno más grande: debemos realizar primero los paréntesis más pequeños, es decir:

$$\begin{aligned}&(9+(2-1))+6\\=&(9+1)+6\\=&10+6\\=&16\end{aligned}$$

Los paréntesis agrupan ciertos números para indicar cuáles son las operaciones que debes realizar primero, por esta razón son llamados **signos de agrupación**.
Anteriormente se usaban otros signos de agrupación tales como los corchetes o los paréntesis cuadrados, pero hoy en día solo se utilizan para agrupar operaciones los redondos: . Por esta razón verás que en libros de matemáticas antiguos aparecen expresiones como: que es igual a tener esto:

Ten en cuenta que, en su función de agrupar, **los paréntesis necesitan aparecer en parejas: uno abriendo y otro cerrando**. No tienen sentido expresiones como o .

$((8-4)-11+3$ ✗

$((8+4)-11)+3$ ✓

Para verificar que tengan sentido, **puedes contar cuántos paréntesis abren y cuántos cierran, debe haber siempre el mismo número**.

¿Y cuándo no hay paréntesis?

Es posible que encuentres expresiones del tipo $12-4+5+9-1$ o $10-5+14+2$, en las que aparecen **sumas y restas** consecutivamente. Existen varias formas de resolver este tipo de operaciones, te enseñaremos dos para que escojas cuál va más con tu estilo:

Primera forma

Empezamos de izquierda a derecha resolviendo las operaciones que vayamos encontrando, en el caso de $12-4+5+9-1$ procedemos así:

Paso 1:

Realizamos $12-4=8$, la expresión queda convertida en $8+5+9-1$.

Paso 2:

Seguimos con $8+5=13$, llegando a $13+9-1$.

Segunda forma

También podemos agrupar los términos que suman aparte de los que restan. **Recuerda que los números negativos representan deudas y los positivos tenencias**. Así, en la expresión $12-4+5+9-1$, los números $12, 5$ y 9 *agregan,* mientras que los números -4 y -1 *sustraen.* Por lo tanto, podemos proceder así:

Paso 1:

Agrupamos positivos con positivos y negativos con negativos: $(12+5+9)$ y $(4+1)$, obteniendo $(12+5+9)-(4+1)$.

Paso 2:

Sumamos los números agrupados en cada paréntesis: $12+5+9=26$ y $4+1=5$. Así se llega la expresión $26-5$.

Paso 3:

Luego calculamos la diferencia entre los resultados, le restamos las deudas a las tenencias: $26-5=21$. Observa el procedimiento completo:

$$
\begin{aligned}
&12-4+5+9-1\\
=&(12+9+5)-(4+1)\\
=&26-5\\
=&21
\end{aligned}
$$

Como te puedes dar cuenta, los resultados de las operaciones fueron los mismos.

Aplicación de sumas y restas combinadas

En muchas ocasiones no te bastará simplemente con solo **sumar** o solo **restar**. Es necesario aprender cómo combinar la suma y la resta para resolver determinados problemas. Analicemos el siguiente:

Un autobús se desplaza por la ciudad, en su primera parada **recoge** 11 pasajeros, en la segunda se **suben** 2 y se **bajan** 7, en la tercera se **suben** 8 y se **bajan** 6. Al llegar a la **cuarta** parada, ¿cuántos pasajeros lleva el bus?

Para resolver este tipo de problemas se **asocian algunas acciones con la suma y otras con la resta.** Por ejemplo, podemos asociar que cuando el bus recoge pasajeros se realiza la operación **sumar**, y cuando de se bajan pasajeros del bus lo podemos asociar con la operación **restar**. Así, cuando traducimos el problema al lenguaje matemático obtenemos: $11+2-7+8-6$.

También podemos contar primero el número de personas que se suben: $(11+2+8)$ y después restarle el número de personas que se bajan: $(7+6)$. Obtenemos en ese caso la expresión: $(11+2+8)-(7+6)$.

$$11+2-7+8-6=8$$

ó

$$(11+2+8)-(7+6)=8$$

Nota que estas dos expresiones corresponden a los dos métodos explicados en la página **uso de los paréntesis**. Resolviendo cualquiera de estas obtenemos que al llegar a la cuarta parada en el autobús hay 8 personas.

Simplificación de expresiones con ley de signos

Estudiaremos ahora la forma correcta de resolver expresiones del tipo $3-(-4-5)+(-1-(-10))$ Observa una forma de hacerlo:

Paso 1:

Debemos resolver primero los **paréntesis** más pequeños. La **resta** $(-4-5)$ da como resultado -9 y según la ***ley de signos*** $(-(-10)=+10)$.

$$\begin{aligned} &3-(-4-5)+(-1-(-10)) \\ =&3-(-9)+(-1+10) \end{aligned}$$

Paso 2:

Siguiendo con la simplificación de los paréntesis que quedan: $-(-9)=+9$ y $-1+10=9$. Así, llegamos a la expresión $3+9+9$.

$$\begin{aligned} &3-(-9)+(-1+10) \\ =&3+9+9 \end{aligned}$$

Paso 3:

Una vez que se han simplificado todos los signos consecutivos, es fácil continuar. Realizamos la **suma** $3+9+9=21$. Observa el procedimiento completo:

$$\begin{aligned} & 3-(-4-5)+(-1-(-10)) \\ =& 3-(-9)+(-1+10) \\ =& 3+9+9 \\ =& 21 \end{aligned}$$

Observa que **solo usamos la *ley de signos* cuando encontramos los símbolos $+$ y $-$ consecutivos. Esta ley nunca se debe usar para resolver las sumas o las retas.** Estaría mal usarla para resolver $-3+4$.

Otro ejemplo

Simplifiquemos la expresión $-(-4-(5+(-2-1)-3))$:

En esta ocasión tenemos varios paréntesis ***anidados***, es decir, que están uno dentro del otro. Los resolvemos paso a paso **desde los más pequeños hasta los más grandes**.

Paso 1:

Comenzamos resolviendo los paréntesis más pequeños. Operamos $-2-1$, que da como resultado -3.

$$-(-4-(5+(-2-1)-3))$$
$$=-(-4-(5+(-3)-3))$$

Paso 2:

Ahora el paréntesis más pequeño es (-3), pero este está precedido por un signo $+$. Debemos entonces usar la la ley de signos: *"**más por menos, menos**"*, obtenemos así: $+(-3)=-3$:

$$-(-4-(5+(-3)-3))$$
$$=-(-4-(5-3-3))$$

Paso 3:

A medida que avancemos, debemos realizar las operaciones que vayan apareciendo, en este caso: $5-3-3=-1$.

$$\begin{aligned}&-(-4-(5-3-3))\\=&-(-4-(-1))\end{aligned}$$

Paso 4:

De nuevo, usando la ley de signos, $-(-1)=+1$, así resolvemos un paréntesis más:

$$\begin{aligned}&-(-4-(-1))\\=&-(-4+1)\end{aligned}$$

Paso 5:

Recuerda realizar las sumas y las restas sin signos consecutivos a medida que van apareciendo: $-4+1=-3$:

$$\begin{aligned}&-(-4+1)\\=&-(-3)\end{aligned}$$

Paso 6:

Finalmente, aplicamos la ley de los signos a $-(-3)$: ***"menos por menos, más".*** Llegamos así a la respuesta final: 3. En la siguiente imagen puedes ver el proceso completo:

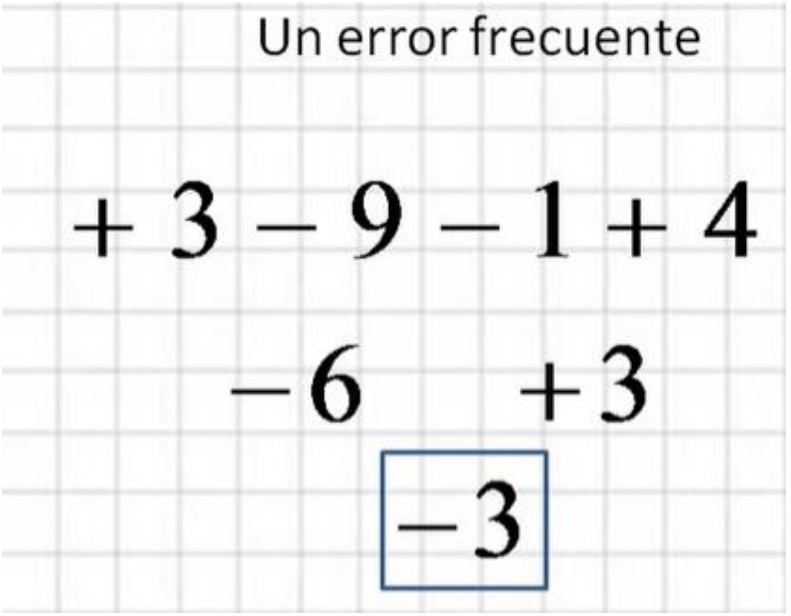
$$
\begin{aligned}
&-(-4-(5+(-2-1)-3)) \\
=&-(-4-(5+(-3)-3)) \\
=&-(-4-(5-3-3)) \\
=&-(-4-(-1)) \\
=&-(-4+1) \\
=&-(-3) \\
=&3
\end{aligned}
$$

Como te puedes dar cuenta, **aplicamos *la ley de signos* al encontrar signos $+$ y $-$ consecutivos** y operamos los números enteros según aparezcan **sumando** o restando como ya sabemos.

Es posible que al trabajar con números grandes no sepas que hacer. Puedes recordarlo así:

- Si las dos cifras tienen el mismo signo, las cantidades se suman y el resultado queda con el signo que tienen las cifras: $-363 - 127 = -490$ o $859 + 428 = 1287$.

- Si las dos cifras tienen signos diferentes las cantidades se restan y el resultado queda con el signo de la **mayor**: $-8949 + 4325 = -4624$, o $9636 - 8736 = 900$.



Cuando tenemos operaciones combinadas, hay dos métodos

a) Operación por lotes de dos en dos, que es lo que se ha hecho en la viñeta: ha hecho +3-9 que le da -6 por un lado, y por el otro -1+4 que sale +3. Luego se hace -6+3 y da el –3.
b) Agrupación por signos (que es lo que suelo hacer yo): Agrupo las operaciones por signos, primero los positivos (+3+4=+7) y luego los negativos (-9-1= -10). Y luego resuelvo lo que nos ha dado en cada agrupación (+7-10 = -3).

Como veis, el resultado es correcto en ambos métodos.

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

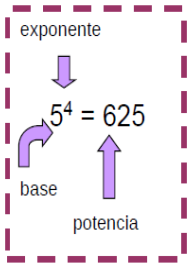
1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo 1:

- María guarda 5 collares en una bolsa, cada 5 bolsas en una caja y cada 5 cajas en un cajón. Tiene 5 cajones con collares, ¿cuántos collares tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar 5 x 5 x 5 x 5 que lo puedes escribir en forma de potencia: 5^4, que se lee cinco elevado a cuatro.

$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$



Recuerda que:

Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots .^{n \text{ factores}} \ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

1.2. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje muy utilizado y se dice que están expresados en el sistema decimal. Loa países árabes también usan el sistema decimal, pero la grafía de sus números es distinta.

El **sistema de numeración decimal** es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

- En el número 4652031 tenemos:

  - La cifra de las unidades: el 1.
  - Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será: $3 \cdot 10 = 30$.
  - En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100 (o por 10^2): $0 \cdot 10^2 = 0$.
  - En cuarto lugar las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 (o por 10^3) la cifra situada en ese lugar: $2 \cdot 10^3 = 2000$.
  - Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será: $5 \cdot 10^4 = 50000$.
  - En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 10^5: $6 \cdot 10^5 = 600000$.
  - Y, por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 106: $4 \cdot 10^6 = 4000000$.

Con esto observamos que el número 4652031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 1.$

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Reloj con números romanos

Si a la derecha de una cifra romana se escribe otra igual o menor, el valor de ésta se suma a la anterior: VII = 7, XXI = 21, LXVII = 67.

La cifra I colocada delante de la V o X, resta 1 unidad: IV = 4.

La cifra X precediendo a la L o a la C le resta 10 unidades: XC = 90.

La cifra C delante de la D o de M resta 100 unidades: CD = 400.

Si un símbolo aparece restando entonces sólo puede aparecer a su derecha un único símbolo de mayor valor.

En ningún número se puede poner una misma letra más de tres veces seguidas. En la antigüedad se ve a veces la I o la X hasta cuatro veces seguidas.

La V, la L y la D no pueden duplicarse porque otras letras (X, C y M) representan su valor duplicado.

Si entre dos cifras cualesquiera existe otra menor, ésta restará su valor a la siguiente:

XIX = 19; CXL = 140.

Las cifras V, D y L no se pueden colocar para restar.

La raya horizontal multiplica por 1000: $\overline{M}$ = 1 000 000.

Ejemplo:

- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año).

Cifras del sistema binario

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1.

Actividades propuestas

10. ¿Podrías escribir los números del 1 al 10 en el sistema binario?

Números naturales

Recuerda que

Los números **naturales** son los que nos sirven para contar y son infinitos:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots.\}.$$

Hay autores que no consideran que el cero sea un número natural. Ya sabes que entró en nuestra historia bastante tarde. Su importancia es enorme como has visto en nuestro sistema decimal.

1.2. Operaciones elementales

Suma

La **suma** o **adición** de números naturales verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $a + b = b + a$. .

  Ejemplo: 13+19 = 19+13 = 32.

- Asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$.

  Ejemplo: (15+7)+23 = 22+23 = 45; 15+(7+23) = 15+30 = 45.

Multiplicación de números naturales

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

- Hacer $6 \cdot 5$ es lo mismo que hacer $6 + 6 + 6 + 6 + 6$.

> ***Recuerda que:***
>
> Las palabras "**multiplicación**" y "**producto**" significan lo mismo, es decir, hacen referencia a la misma operación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Si llamamos *a*, *b* y *c* a tres números naturales, se cumple la siguiente propiedad:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Por ejemplo:

- Sustituyendo las letras a por 2, b por 5 y c por 7, tenemos que:

$$2 \cdot (5 + 7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7.$$

Nota

Recuerda la **propiedad conmutativa** de la multiplicación:

$a \cdot b = b \cdot a.$

Ejemplo:

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2.$

Esta propiedad también se cumple para la resta.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, a, b y c números naturales cuálesquiera, se cumple que:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

- Calcular $15 \cdot 23$ mentalmente es complicado, pero si hacemos:

$15 \cdot 23 = 15 \cdot (20 + 3) = 15 \cdot 20 + 15 \cdot 3$ resulta más sencillo.

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

$15 \cdot 20 + 15 \cdot 3 = 15 \cdot (20+3)$ se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15,* pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ es lo mismo que: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa:

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a.$$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ es lo mismo que: $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa:

$$b \cdot a - c \cdot a = (b - c) \cdot a.$$

Ejemplos:

a) $870 \cdot 4 - 870 \cdot 3 = 870 \cdot (4 - 3) = 870 \cdot 1 = 870.$

b) $450 \cdot 2 + 3 \cdot 450 = (2 + 3) \cdot 450 = 5 \cdot 450 = 2250.$

c) $45 \cdot 6 - 45 \cdot 5 = 45 \cdot (6 - 5) = 45 \cdot 1 = 45.$

División de números naturales

> ***Nota***:
>
> La palabra "**cociente**" significa el resultado de hacer una "**división**" Los símbolos utilizados para representarlas son:
>
> /, : , y $\frac{\square}{\square}$ (la fracción)

Ejemplo

- En la cafetería de mi escuela las mesas son de 6 personas y en la clase de primero de GES hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se llaman:

33 → Dividendo 6 → Divisor 5→ Cociente 3→ Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: $33 = 6 \cdot 5 + 3$

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & C \end{array}$$

Se verifica que:

$$D = d \cdot c + r.$$

Ejemplo:

- El cociente entre 3658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

$$3658 = 65 \cdot 56 + 18.$$

Ejemplos:

- 25/5, 25: 5 y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

La expresión:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: $325 - (15 \cdot 21) = 10$.

Jerarquía de las operaciones

- En la expresión: $3 \cdot 4 + 2$, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería: $3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$.

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **potencias** y **raíces**, a continuación las **multiplicaciones** y **divisiones** siempre de izquierda a derecha, y luego, las **sumas y restas** también de izquierda a derecha.

Ejemplo:

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75.$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45.$$

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(2 + 3)^2 \cdot 10/5 = 5^2 \cdot 2 = 50.$$

$$2 + 3^2 \cdot 10/5 = 2 + 9 \cdot 2 = 2 + 18 = 20.$$

Notas

a) Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: $(21 \cdot 2) + 30$ resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.

b) Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 5 y de 7.

Se definen los **múltiplos** de un número natural ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números naturales.

Ejemplo:

- La tabla del 5 que has escrito antes está formada por los valores:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90...

Todos ellos son múltiplos de 5.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{5}$.

Es decir: $\dot{5}$ = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90...}.

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 5 que has escrito antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número natural son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

16. Calcula los siete primeros múltiplos de 8 y de 9.

17. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144.

18. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 12 y 90.

Divisores de un número

Un número natural ***a*** es **divisor** de otro número natural ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número natural tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

- 2 es divisor de 8 porque al dividir 8 entre 2, el resto es 0.
- 10 es divisor de 20 porque al dividir 20 entre 10, el resto es 0.
- 6 es divisor de 36 porque al dividir 36 entre 6, el resto es 0.
- 1 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 1, el resto es 0.
- 18 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 18, el resto es 0

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

- 8 es divisible por 2 porque 2 es divisor de 8, es decir, al dividir 8 entre 2, el resto es 0.
- 20 es divisible por 10 porque 10 es divisor de 20, es decir al dividir 20 entre 10, el resto es 0.
- 36 es divisible por 6 porque 6 es divisor de 36, es decir, al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser *múltiplo* y ser *divisor* son relaciones inversas.

b) **No confundas** las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: $5 \cdot 3 = 15$, podemos deducir lo siguiente:
  - 5 y 3 son divisores de 15.
  - 15 es múltiplo de 3 y de 5.
  - 15 es divisible por 3 y por 5.

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número natural es divisible por otro número natural, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número natural es divisible por 2 cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 312, 50, 346, 500, 780, 988 son divisibles por 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número natural es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo:

- El número 231 es divisible por 3 ya que 2 + 3 + 1 = 6 que es múltiplo de 3.
- El número 1002 es divisible por 3 ya que 1 + 0 + 0 + 2 = 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 69 es divisible por 3 ya que 6 + 9 = 15, y 15 es divisible por 3, pues 1 + 5 = 6 que es múltiplo de 3. Por tanto, 6, 15 y 69 son múltiplos de 3.
- El número 78596778696 es divisible por 3 ya que 7 + 8 + 5 + 9 + 6 + 7 + 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78, y 78 es divisible por 3 pues 7 + 8 = 15, y 15 lo es.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número natural es divisible por 4 si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 3628 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número natural es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

Los números 4875 y 34590 son divisibles por 5.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número natural es divisible por 6 cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

El número 7332 es divisible por 6 ya que:

- Lo es por 2 por ser par.
- Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número natural es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

Ejemplo:

El número 6012 es divisible por 9 ya que: 6 + 0 + 1 + 2 = 9.

El número 3903 no es divisible por 9 ya que: 3 + 9 + 0 + 3 = 15 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número natural es divisible por 10 cuando termina en 0.

Ejemplo:

El número 59870 es divisible por 10.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número natural es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo:

El número 80496 es divisible por 11 ya que: (8 + 4 + 6) – (0 + 9) = 11.

2.3. Obtención de todos los divisores de un número

En principio, para hallar los divisores naturales de un número natural N, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., N. De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 18 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,...., 18 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.

Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c***, entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.

Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 54.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 54.

Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 54 : 2 = 27 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 27.

Es divisible por 3. (5 + 4 = 9, múltiplo de 3) → 54 : 3 = 18 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 18.

Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 54 : 6 = 9 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 9.

Es divisible por 9. (5 + 4 = 9, múltiplo de 9) → 54 : 9 = 6.

Como el cociente 6 es menor que el divisor 9, ya hemos terminado. 9 y 6 (Repetidos).

Por tanto, los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores de 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones, no tiene dos divisores y tampoco más de dos divisores.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 22, 45, 60, 98,345 o 39867657 son compuestos.

3.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número.

Por ejemplo, si quiero expresar 13 como producto de dos números, sería:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o también } 13 = 13 \cdot 1.$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

Para descomponer el número 20 podríamos hacer: $20 = 4 \cdot 5$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 4 no es un número primo.

Su descomposición es $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que se expresa como $20 = 2^2 \cdot 5$.

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, descomponer un número primo no tiene ningún interés ni dificultad) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.
Por ejemplo: $60 = 30 \cdot 2$.

Como $30 = 15 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$, tenemos que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ y por tanto, su descomposición es:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 90:
Como 90 es múltiplo de 2, lo dividimos: 90 : 2 = 45.
Como 45 no es múltiplo de 2, buscamos el menor primo posible por el que se pueda dividir, que es 3, lo dividimos: 45 : 3 = 15.
Como 15 se puede volver a dividir entre 3, tenemos: 15 : 3 = 5.
Por tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Esto se suele realizar como se señala en la nota 1 de la siguiente forma:

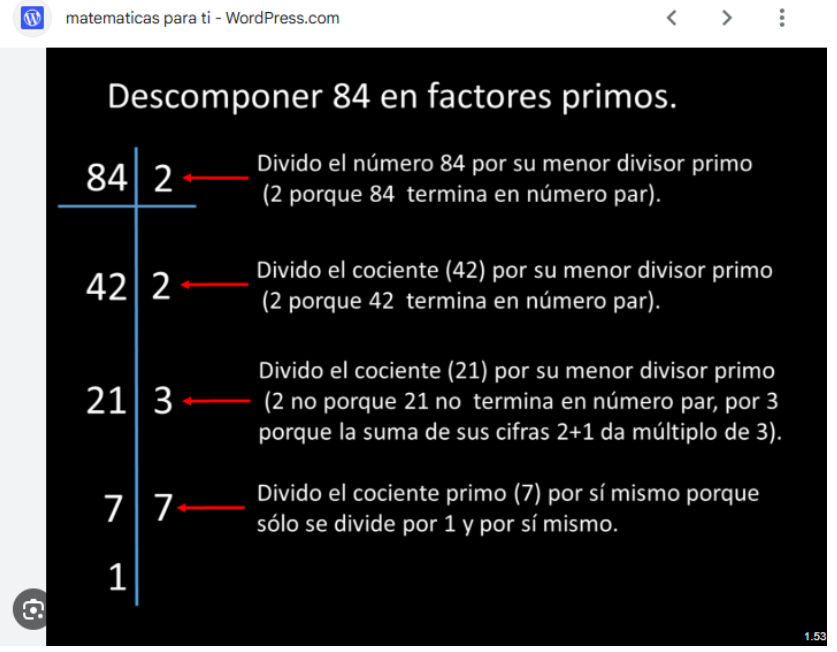
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 2520:

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Por tanto: $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Veamos una descomposición en factores primos, paso a paso.



3.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 24 y 36:

Divisores de 24 → 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Divisores de 36 → 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.

¿Cuáles son los mayores divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12 y se dice que 12 es el **máximo común divisor** de 24 y de 36.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

En el ejemplo anterior, escribiríamos: M.C.D. (24, 36) = 12.

En principio, parece que hallar el M.C.D. no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados al menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D.

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 72, 90 y 120.

1. Factorizamos cada número:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2.$$
$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados al menor exponente: Son 2 y 3.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$\text{M.C.D. } (72, 90, 120) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D. entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

3.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

Vamos a calcular m.c.m. (10, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 10 → 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, 75, 90, ...

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 30, 60, 90, ... pero el menor de ellos es el 30. Por tanto:

$$\text{m.c.m. } (10, 15) = 30.$$

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

- Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 16, 24, 40 siguiendo estos pasos:

  1. Factorizamos los números:

  $$16 = 2^4.$$

  $$24 = 2^3 \cdot 3.$$

  $$40 = 2^3 \cdot 5.$$

  2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente:

  En nuestro caso: 2^4, 3 y 5.

  3. Multiplicando estos factores tenemos que:

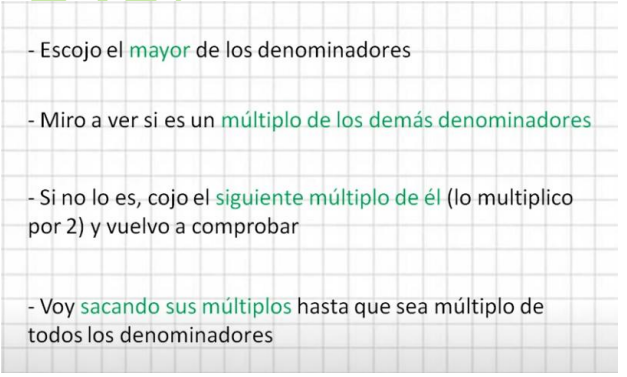
  $$\text{m.c.m. } (16, 24, 40) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Elección entre m.c.m. o M.C.D.

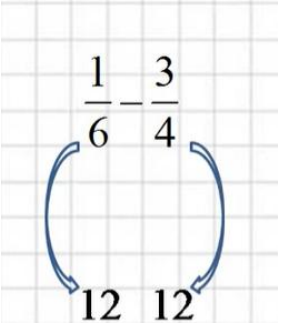
Aquí te dejo algunas orientaciones que pueden ayudarte a decidir cuándo hay que usar el m.c.m. y cuándo el M.C.D.:

- En un problema habrá que usar el m.c.m. cuando nos pregunten por **"algo que se repite en el tiempo", cuando nos pregunten por el momento en el que "se vaya a coincidir" o cuándo "se encuentran".** Lo que tenemos que calcular será siempre un número mayor o igual a los números dados en el problema.
- Utilizaremos el M.C.D. en aquellos problemas que nos pidan **"dividir o repartir en partes iguales", "hacer grupos" o nos pregunten por "el máximo, el mayor, el más grande, el más amplio, …"** En este caso, lo que nos piden calcular será siempre menor o igual a los números dados en el problema.

Truco para el m.c.m. de SUMAS y RESTAS de FRACCIONES (NO APLICA PARA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES).



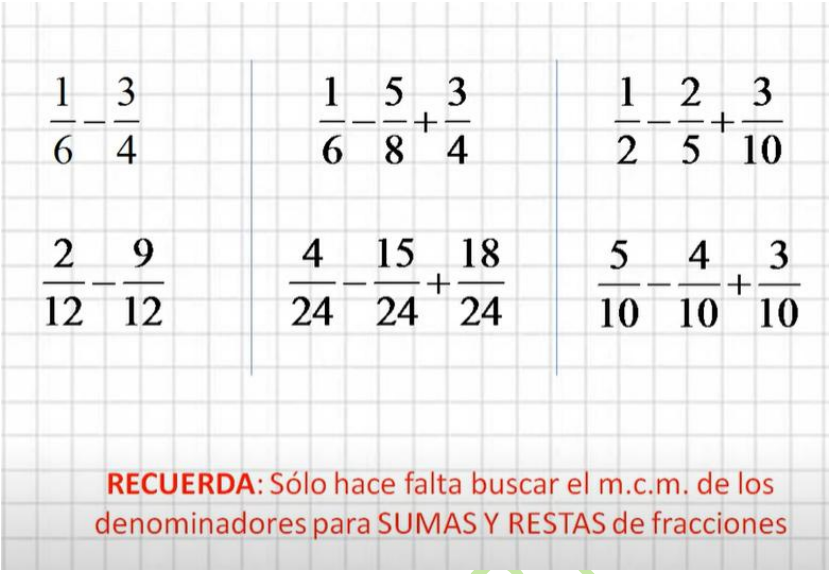
RAMON FERRER MARI



EXPLICACIÓN POR PASOS:

1. Tomo el mayor denominador (6) y lo multiplico por 1, con lo que me queda el mismo denominador (6).
2. Tomo el siguiente denominador (4) y miro si, multiplicándolo per algún número, nos da el primer denominador. No lo hallo ya que 4 *1 es 4 (no llego) y 4*2 es 8 (me paso).
3. Vuelvo al mayor denominador (6), lo multiplico por 2, con lo que nos da el número 12.
4. Ahora tomo el siguiente denominador (4) y miro si, multiplicándolo por algún número, obtengo el número 12. Resulta que sí, ya que si multiplico 4*3 nos da 12. Ya lo tenemos, así que ya hemos acabado.

RAMON FERRI MARÍ



Consejo de Ramón:

Aunque el paso 1. Te parezca una estupidez, no te lo saltes porque eso te ayuda a incorporar el hábito de ir probando secuencialmente por todos los números.

Ejemplo típico de Mínimo Común Múltiplo:
El epitafio de la tumba de Diofanto.

La edad de Diofanto

En la tumba de Diofanto los números revelarán la duración de su vida: Su infancia ocupó la sexta parte. Al terminar la siguiente doceava parte, la barba cubrió sus mejillas por primera vez. Otra séptima parte pasó antes de casarse y tras 5 años de matrimonio nació su primer hijo. Por desgracia, una vez alcanzados la mitad de los años que viviría su padre, este hijo pereció y, tan solo 4 años después de su muerte, también murió Diofanto de Alejandría.

Resolución: Datos:

x= Edad de Diofanto

- En la niñez: x/6
- En su adolescencia: x/12
- Vida sin esposa: x/7
- Vida con sus hijos: 5
- Despues de sus hijos: x/2+4

Sumamos todo:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{5}{1}+\frac{x}{2}+\frac{4}{1}=x$$

Esta ecuación así no es rápida de resolver, por lo tanto, vamos a sacar el Mínimo Común Múltiplo:

Factorizamos los denominadores:

6= 3*2

12= $\mathbf{3} * \mathbf{2^2}$

7=**7**

1=1

2=2

Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

MCM= $\mathbf{3 * 2^2 * 7 = 3 * 4 * 7 = 84}$

Y procedemos a resolver la ecuación, multiplicando todos los términos por 84.

Desgraciadamente, o el autor de los desarrollos cometió dos errores o el tipógrafo que lo imprimió le jugó una mala pasada.

Sea como fuere, he introducido las oportunas correcciones para que quede perfecto.

RAMON FERRER I MARÍ

$$\frac{84(X)}{6}+\frac{84(X)}{12}+\frac{84(X)}{7}+84(5)+\frac{84(X)}{2}+84(4)=88(X)$$

$$14x+7x+12+420+42n+336=84x$$

$$9x=756$$

$$x=84$$

Rpta: Diofanto tiene 84 años

El primer desarrollo adolece de una errata de imprenta, señalada con la flecha azul. La cifra correcta es 84(X).

El segundo desarrollo también ha olvidado incorporar la X en la tercera posición. El desarrollo correcto es:

14x + 7x + 12**x** + 420 + 42x + 336 = **84x**

75x + 756 = 84x

756 = 84x – 75x

756 = 9x

$$x=\frac{756}{9}=84$$

RAMON FERRER I MA

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa.	El 1 no tiene el mismo valor en 1845 que en 6351.
Jerarquía de las operaciones	- En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis. Luego las potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha y por último las sumas y restas.	La operación $2 \cdot 3+7$ tiene como resultado 13, no 20, que es lo que resultaría efectuando incorrectamente antes la suma que el producto.
- Divisor **- Divisible** **- Múltiplo**	- Si *a* y *b* son números naturales, *a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. - Si *a* y *b* son números naturales, *a* es **múltiplo** de *b* o a es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 3 son divisores de 6. • 6 es múltiplo de 2 y de 3. • 6 es divisible por 2 y por 3.
Criterios de divisibilidad	Simplifican mucho el cálculo de la descomposición factorial y, en general averiguar cuando un número es divisible por otro.	3742 es divisible por 2. 4980 es divisible por 2 y 5. 2958 es divisible por 3.
Número primo	Es aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Es aquel que tiene más de dos divisores.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19
Descomponer un número en factores primos	Consiste en expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $18 = 2 \cdot 3^2$ $12 = 2^2 \cdot 3$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m. (18, 12) = 36.
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D. (18, 12) = 6.

Los nombres de Máximo común divisor y mínimo común múltiplo son engañosos. El M.C.D. por mucho que diga "máximo" son los factores comunes elevados al **menor exponente.**

Y el mínimo común múltiplo, por mucho que diga "mínimo" son los factores comunes y no comunes elevados al **mayor exponente.**

Índice

1. POTENCIAS

1.1. CONCEPTO DE POTENCIA: BASE Y EXPONENTE
1.2. CUADRADOS Y CUBOS
1.3. LECTURA DE POTENCIAS
1.4. POTENCIAS DE UNO Y DE CERO
1.5. POTENCIAS DE 10. NOTACIÓN CIENTÍFICA

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE
2.2. COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE
2.3. ELEVAR UNA POTENCIA A OTRA POTENCIA

3. RAÍCES

3.1. CUADRADOS PERFECTOS
3.2. RAÍZ CUADRADA. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
3.3. RAÍZ n-ÉSIMA DE UN NÚMERO
3.4. INTRODUCIR FACTORES EN EL RADICAL
3.5. EXTRAER FACTORES DEL RADICAL
3.6. SUMA Y RESTA DE RADICALES

Resumen

Para trabajar con números muy grandes, para calcular la superficie de una habitación cuadrada o el volumen de un cubo nos va a resultar útil a usar las potencias. Conoceremos en este capítulo como operar con ellas.

Si conocemos la superficie de un cuadrado o el volumen de un cubo y queremos saber cuál es su lado utilizaremos las raíces. En este capítulo aprenderás a usarlas con algo de soltura.

1. POTENCIAS

1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo 1:

María guarda 6 collares en una bolsa, 6 bolsas en una caja y cada 6 cajas en un cajón. Tiene 6 cajones con collares, ¿cuántos collares tiene?

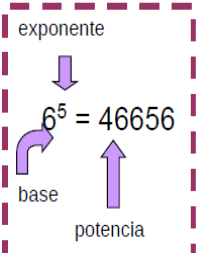
Para averiguarlo debes multiplicar 6 x 6 x 6 x 6 x 6 que lo puedes escribir en forma de potencia: 6^6, que se lee 6 elevado a 6.

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6 = 46656.$$

Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots . n \text{ factores} \ldots \ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**



1.3. Lectura de potencias

Las potencias se pueden leer de dos maneras:

Ejemplo 3:

a) Así 5^2 se puede leer 5 elevado a 2 y también se lee 5 al cuadrado

b) 7^3 se puede leer 7 elevado a 3 y también se lee 7 al cubo

c) 8^4 se puede leer 8 elevado a 4 y también se lee 8 a la cuarta

d) 3^5 se puede leer 3 elevado a 5 y también se lee 3 a la quinta.

$100 = 2^2 \cdot 5^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz es
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Son cuadrados perfectos.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
¿Lo son también 144, 324 y 400?

1.4. Potencias de uno y de cero

Una potencia de cualquier base distinta de cero elevada a cero es igual a 1.

$3^0 = 1$

Ejemplo 4:

$7^0 = 1$; $2459^0 = 1$; $1^0 = 1$.

Uno elevado a cualquier exponente es igual a 1.

$1^8 = 1$

Ejemplo 5:

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1^{35} = 1$; $1^0 = 1$.

Cero elevado a cualquier exponente distinto de cero es igual a 0.

$0^8 = 0$

Ejemplo 6:

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$; $0^{35} = 0$.

Observación: 0^0 no se sabe cuánto vale, se dice que es una *indeterminación*.

1.5. Potencias de 10. Notación científica.

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente:

Ejemplo 7:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$10^5 = 100\,000$$

¿Sabrías hallar 10^7 sin hacer ninguna operación?

La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.

Esto nos permite expresar cualquier número en **forma polinómica** usando potencias de 10.

$$6928 = 6 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 = 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$$

Un número en **notación científica** se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10: $\boldsymbol{a \cdot 10^n}$

Ejemplo 8:

Observa cómo se utiliza la notación científica en los siguientes ejemplos:

a) En la Torre Eiffel hay 2 500 000 remaches = $25 \cdot 10^5$ remaches

b) La masa de la Tierra es:

$$M_T = 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,g = 598 \cdot 10^{25}\,g$$

c) La superficie del globo terrestre es de 500 millones de kilómetros cuadrados, luego es igual a: 500 000 000 $km^2 = 5 \cdot 10^8$ km^2.

Actividades propuestas

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:

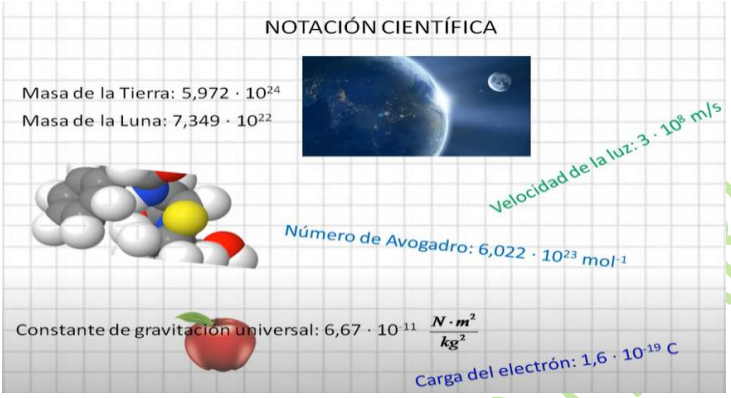
a) $10^{\square} = 10\,000$. b) $10^{\square} = 10\,000\,000$. c) $10^{\square} = 100$

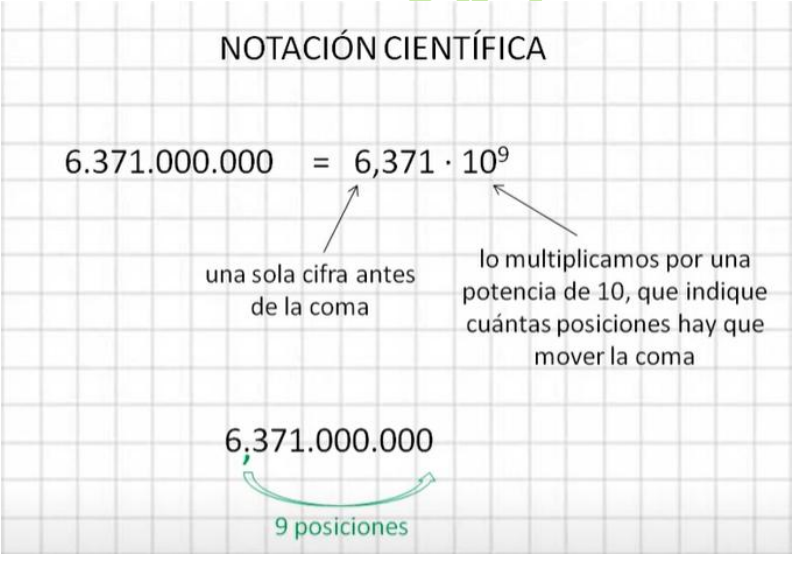
Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación, dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.

a) Compruébalo. Marca **7** * * **=** ¿qué obtie-

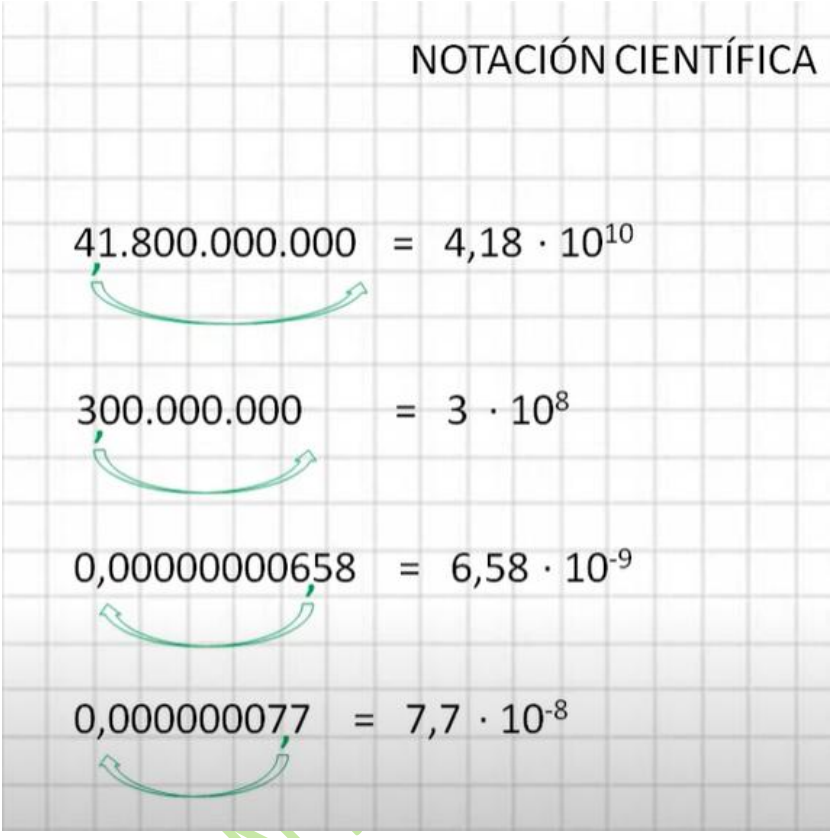
NOTACIÓN CIENTÍFICA

Es una manera fácil y rápida de expresar cantidades que són, o muy grandes, o muy pequeñas.



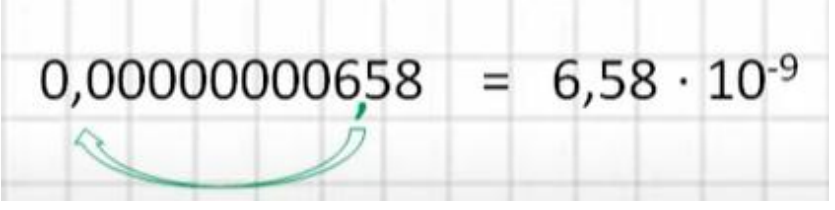


Son 6 posiciones por cada uno de los seis ceros, con más otras tres posiciones por las cifras de detrás de la coma, que es el número 371.



Pero también sirve para expresar magnitudes muy pequeñas. En ese caso el formato es 0,0… y la cifra que deseamos expresar.

Pero OJO… Ponemos la coma tras la primera cifra diferente de cero, nos olvidamos de contar todas las cifras A LA DERECHA DE LA COMA y sólo nos importarán las que quedan a la Izquierda de la coma.



2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. Producto de potencias de igual base

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$9^3 \cdot 9^4 = 9^{3+4} = 9^7$

Ejemplo 9:

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{2+3} = 3^5$$

2.2. Cociente de potencias de igual base

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, [illegible] diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$

Ejemplo 10:

$$3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$$

2.3. Elevar una potencia a otra potencia

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$(6^3)^4 = 6^{3 \cdot 4} = 6^{12}$

Ejemplo 11:

$$(7^5)^3 = (7^5) \cdot (7^5) \cdot (7^5) = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^{15}$$

Actividades propuestas

11. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

12. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ y también } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0.$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.

2.4. Potencia de un producto

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo 12:

$$(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3.$$

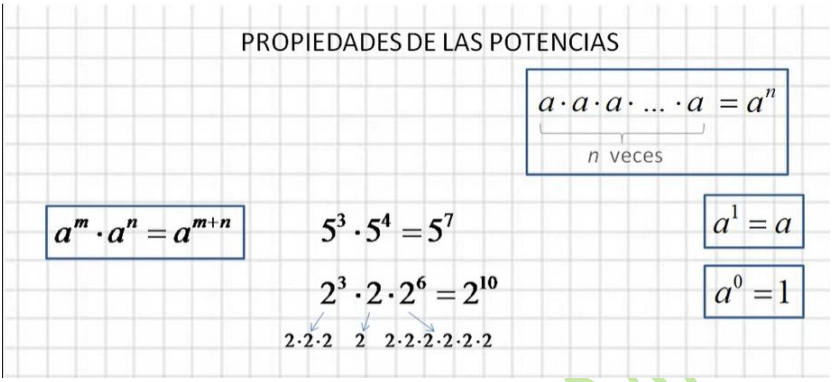
2.5. Potencia de un cociente

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

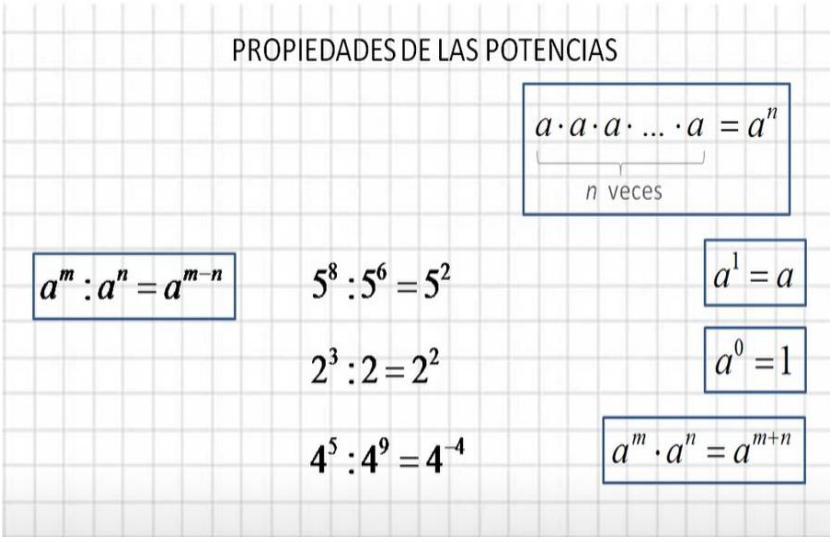
$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

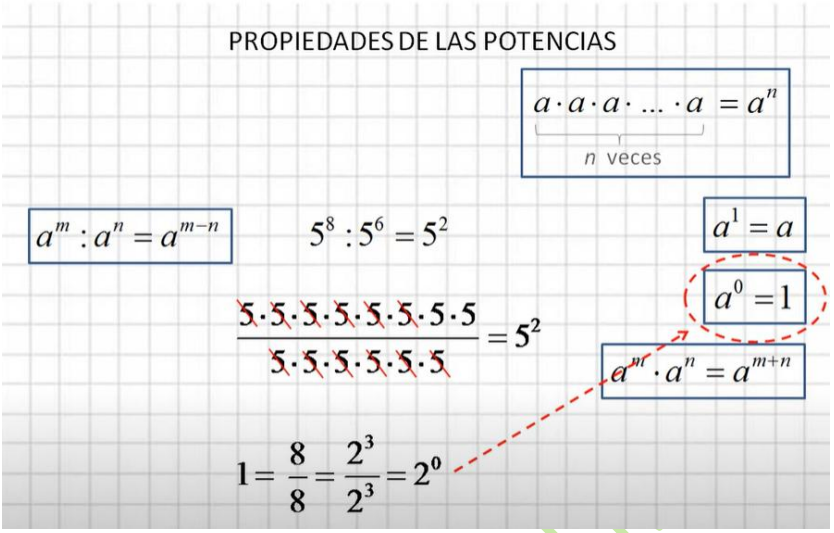
Ejemplo 13:

$$(10 : 4)^3 = 10^3 : 4^3$$

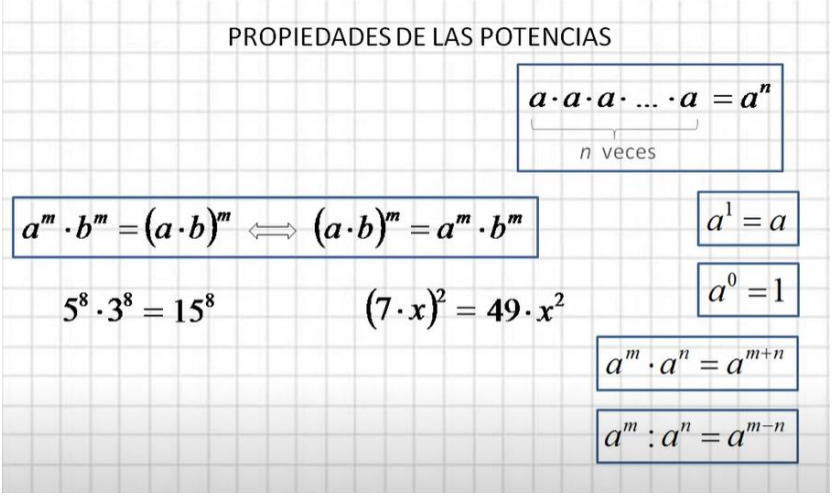


Ese 2 suelto quedaría como 2^1 por eso sale 2^{10}.





$a^0 = 1$ → $1 = \frac{8}{8} = \frac{2^3}{2^3} = 2^0$ Aplicando la Propiedad TRANSITIVA→ *Si a=b y b=c, entonces a=c*



PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

$$a^m : b^m = (a:b)^m \iff (a:b)^m = a^m : b^m$$

$$a^1 = a$$

$$12^8 : 3^8 = 4^8$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \iff (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(5^3)^4 = 5^{12}$$

$$5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3$$

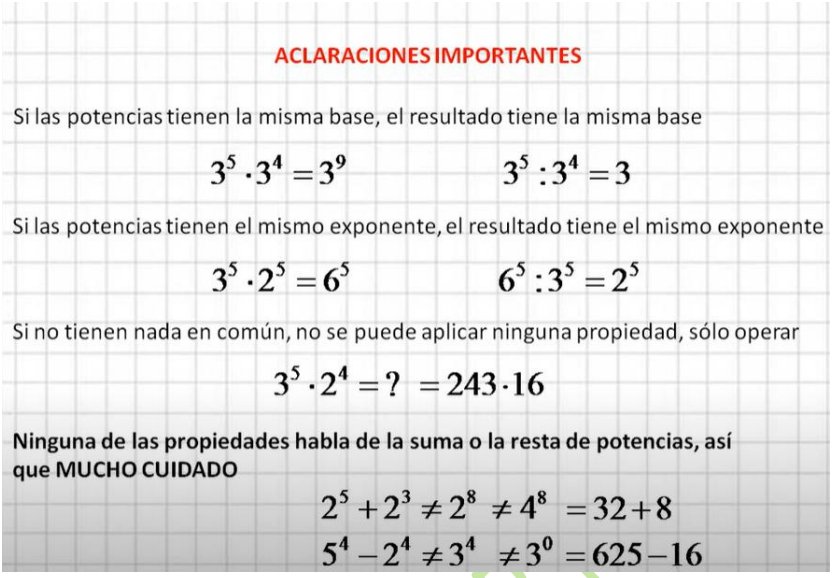
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

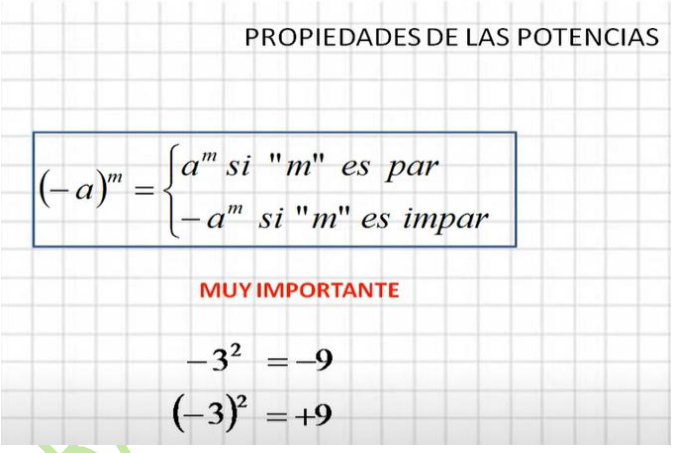
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(5^3)^4 = 5^{12}$$

$$(2^3)^{-2} = 2^{-6}$$

$$\left[(4^3)^0\right]^2 = 4^0 = 1$$





¿Por qué $-3^2 = -9$? ¿No es una contradicción con la regla de los signos que nos dice que (-)*(-)=(+)?

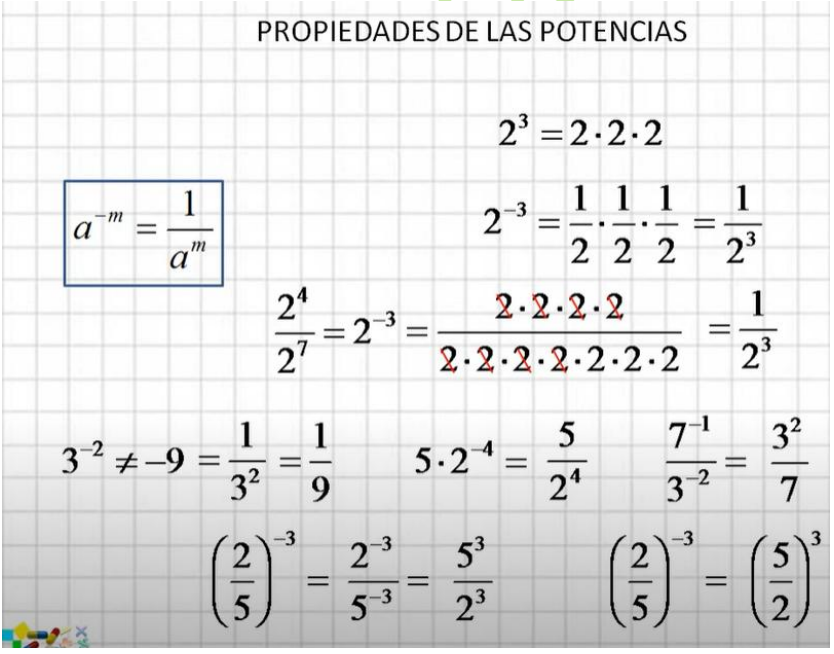
La existencia del paréntesis implica que la potencia 2 "*domina*" tanto al menos como al tres, por eso se le aplica a ambas cosas de forma "*conjunta y solidária*" como se diría en Derecho, y le afecta la regla arriba expuesta.

Por el contrario, en el caso $-3^2 = -9$ la potencia sólo afecta al número que la lleva, lo que implica que "*pasa completamente*" del signo que lleve delante. Al ir sin paréntesis, al exponente 2 sólo le importa que la base, que es 3, haga lo que él dice, que en este caso es: "*A ver número tres, te ordeno que te multipliques a ti mismo dos veces, conservando el signo que tienes*".

O, dicho de otro modo, **al ir sin paréntesis, el signo del resultado de operar la potencia, debe ser el mismo que antes de operarla.**

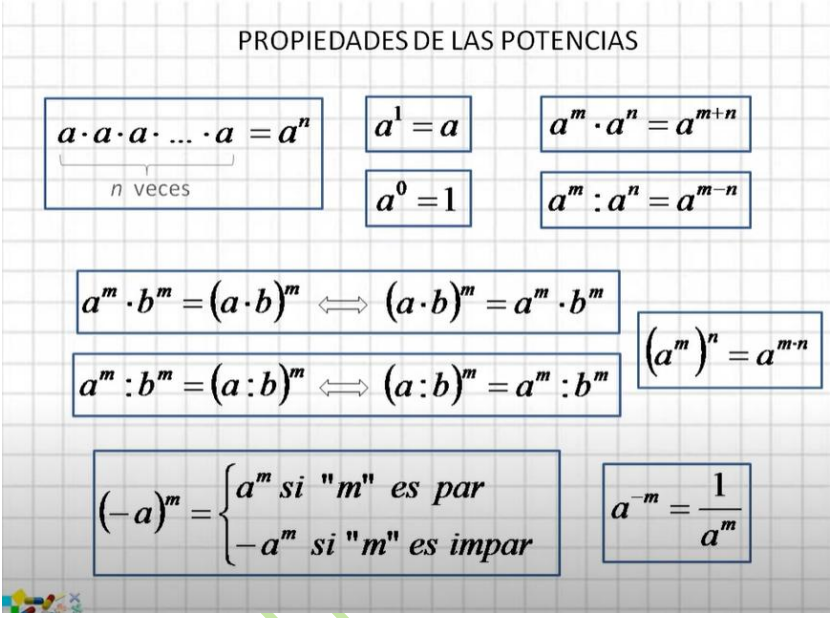
Veámoslo mejor haciendo operaciones combinadas

$12-3^2 = 12-9 = +3$ mientras que $12(-3)^2 = 12+9 = +21$

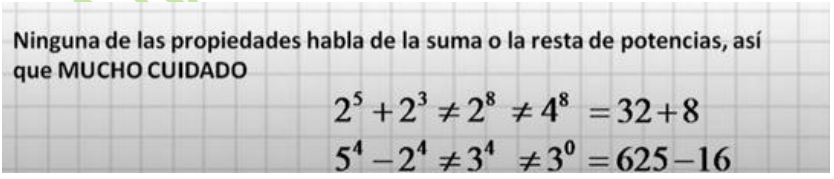


Como podéis ver, la forma de convertir un exponente negativo en uno positivo es "*darle la vuelta al quebrado*", es decir convertirlo en su opuesto.

A modo de recordatorio:



No me cansaré de repetirlo, **las leyes de las potencias NUNCA SE APLICAN A SUMAS Y RESTAS DE POTENCIAS.**



En éste caso, **primero operamos cada potencia por separado (de igual o diferente base) y** luego **sumamos o restamos los resultados**. Igual base: $2^5 + 2^3 = 32 + 8$ = 40. Diferente base $5^4 - 2^4 = 625 - 16$ = 609.

3. RAÍCES

3.1. Cuadrados perfectos

Si se quiere construir un cuadrado de lado 2, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?

Necesitamos 4. El 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.

Si queremos construir ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos? Necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto. Observa que $3^2 = 9$.

Ejemplo 14:

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de 5 metros de lado?

Su área vale $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ metros cuadrados.

3.2. Raíz cuadrada. Interpretación geométrica

La raíz cuadrada **exacta** de un número natural *a* es otro número natural *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo 15:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$, y por tanto:

$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de la elevar al cuadrado.

Por tanto, como $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$.
Al escribir $\sqrt{25} = 5$ se dice que *la raíz cuadrada de 25 es 5.*

Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 25 y se dice que el **valor de la raíz** es 5.

3.3. Raíz *n*-ésima de un número

Como $2^3 = 8$ se dice que $\sqrt[3]{8} = 2$ que se lee: *la raíz cúbica de 8 es 2*. El **radicando** es 8, el valor de la **raíz** es 2 y 3 es el **índice**.

La ***raíz enésima*** de un número *a*, es otro número *b*, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

Ejemplo 18:

- Por ser $64 = 4^3$, se dice que 4 es la *raíz cúbica* de 64, es decir $\sqrt[3]{64} = 4$.
- Por ser $81 = 3^4$, se dice que 3 es la *raíz cuarta* de 81, es decir $\sqrt[4]{81} = 3$.

3.4. Introducir factores en el radical

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

Ejemplo 19:

$$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{200}$$

3.5. Extraer factores del radical

Para extraer números de un radical es preciso descomponer el radicando en factores:

Ejemplo 20:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2}$$

3.6. Suma y resta de radicales

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar y restar radicales, estos deben ser semejantes; en ese caso, se operan los coeficientes y se deja el mismo radical.

Cuidado, un error muy común: la raíz de una suma (o una resta) **NO** es igual a la suma (o la resta) de las raíces:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

RESUMEN

Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. 5 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	5^2 es 5 al cuadrado y 5^3 es 5 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$7^0 = 1$; $1^{35} = 1$; $0^{234} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^3 = 1\,000$ $10\,000 = 10^4$
Notación científica.	Para escribir un número en notación científica se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$4^2 \cdot 4^3 =$ $(4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) =$ $4^{2+3} = 4^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(2^4)^6 = 2^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a.	$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{49} = 7$

Relación entre Potencias, Raíces y Logaritmos.

Tenemos esta expresión

$$Base^{Exponente} = Potencia$$

$$B^{E} = P$$

La **Base** es un numero que se multiplica por sí mismo el número de veces que indica el **Exponente** y a su resultado, le llamamos **Potencia.** Un ejemplo típico es el siguiente y lo usaremos para explicar las tres operaciones que siguen:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Fácil ¿Verdad?. Bueno pues una operación tan sencilla es capaz de generar otras dos: La radicación y los logaritmos.

De entrada, la radicación es la operación inversa de la potenciación. Con ella, nos dan la Potencia y el exponente y nos piden que averigüemos la Base.

RAMON FERRER I MARI

En el ejemplo anterior, que es $5^2 = 25$ la Raíz cuadrada[11] de 25 es 5 y se opera y escribe de esta guisa $\sqrt{25} = 5.$

Cuando hacemos una raíz cuadrada debemos preguntarnos ¿Hay algún número que, multiplicado por sí mismo, nos dé un resultado exacto o que se aproxime mucho al que aparece dentro del símbolo de la raíz?

Y la cosa no queda aquí, porque aún tenemos una tercera operación que son los logaritmos, que nos permiten despejar el exponente, cuando lo tenemos como incógnita. El nombrecito, que se las trae, viene del griego **λόγος** lógos 'razón' y **ἀριθμός** arithmós 'número'.

¿Cómo se definen los logaritmos?

El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

RAMON FERRER I MARÍ

[11] Recuerda que en el símbolo $\sqrt{}$ se lee Raiz cuadrada, aunque no le pongamos un dos, cosa que sí nos toca hacer en cualquier otro tipo de Raíz, como por ejemplo la raíz cúbica, que como está elevada a 3, la escribimos como $\sqrt[3]{}$

Al igual que la radicación tiene el símbolo especial $\sqrt{}$ en el mundo de los logaritmos su símbolo característico es **Log**, abreviatura de **Log**aritmo seguido de un subíndice (el número pequeñito que aparece junto a Log) y otro número que indica la potencia.

En nuestro ejemplo habitual esto sería así:

$$\log_5 25 = 2$$

Esto se lee "*Logaritmo en base 5 de 25 es igual a 2*"

$$Base^{Exponente} = Potencia$$

$$B^E = P$$

Operación	¿Qué tengo? (datos)	¿Qué busco? (Incógnita)
POTENCIACIÓN	La BASE (B)y el EXPONENTE (E)	La POTENCIA (P).
RADICACIÓN	La POTENCIA (P) y el EXPONENTE (E)	La BASE (B)
LOGARITMO	La BASE (B) y la POTENCIA (P)	El EXPONENTE (E)

RAMON FERRER I MARÍ

Índice

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

1.2. DISTINTAS FUNCIONES EXPONENCIALES

1.3. EL NÚMERO *e*. LA FUNCIÓN $f(x) = e^x$

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.1. DEFINICIÓN Y CÁLCULO ELEMENTAL DE LOGARITMOS

2.1.1. LOGARITMOS INMEDIATOS

2.1.2. LOGARITMOS DECIMALES Y NEPERIANOS CON LA CALCULADORA

2.1.3. CAMBIO DE BASE DE LOGARITMOS

2.2. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

2.2.1. EXPRESIONES LOGARÍTMICAS Y ALGEBRAICAS

2.3. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.3.1. GRÁFICAS Y CARACTERÍSTICAS

2.3.2. RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

3.1. LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

3.2. LA FUNCIÓN TANGENTE

Resumen

Entre las diversas funciones hay algunas que tienen una importancia especial, o la han tenido históricamente. En estos dos capítulos te mostramos tres tipos muy importantes.

Términos como *crecimiento exponencial* o *curva sinusoidal* derivan de este tipo de funciones.

Tienen unas propiedades importantísimas en el análisis matemático, ingeniería, medicina, ciencias sociales, etc. En este capítulo aprenderás el cálculo de logaritmos y las propiedades de las funciones exponenciales y circulares y de sus gráficas.

El término *logaritmo* fue acuñado en 1614 por el matemático escocés *John Neper* (1550-1617). Antes de la invención de las calculadoras electrónicas, los logaritmos también fueron imprescindibles para el cálculo de potencias de números no enteros.

Las funciones trigonométricas son muy conocidas y constituyen uno de los ejemplos más populares de funciones periódicas. Ellas u otras funciones relacionadas se encuentran por doquier en la naturaleza y se utilizan en física, electrónica, etc. Numerosas gráficas comparten sus propiedades, como por ejemplo la forma de una onda, también llamada *sinusoide*, que debe este nombre a la función *seno*.

John Napier (Neper). Barón de Merchiston

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. Función exponencial

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x},\ y = 5^{-x}.$$

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

En este curso estudiamos funciones exponenciales sencillas, del tipo $y = b^x$, donde la base b es un número positivo distinto de 1.

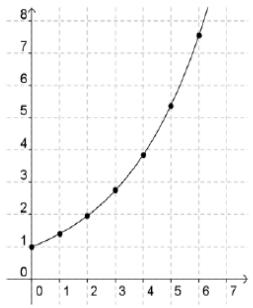
Actividades resueltas

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número "y" de bacterias que habrá al cabo de "x" horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (x)	Núm. bacterias (y)
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
...	...

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la "x" valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general la "x" sí puede tener valores negativos. Sin embargo la base b solo puede tener valores positivos. Asimismo, observarás que la variable "y" también resulta siempre positiva. Más adelante recogemos estas propiedades al hablar de dominio y recorrido de la función exponencial.

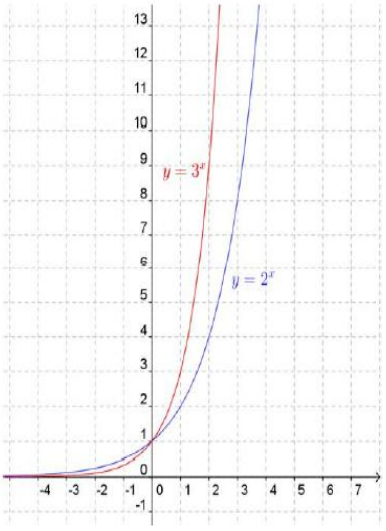
1.2. Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "b". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

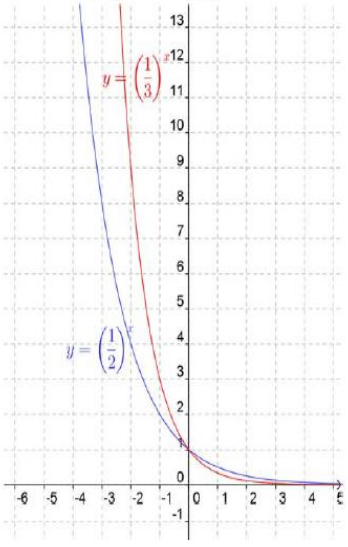
En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $y = 2^x$ e $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, "y" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos $(0, 1)$, $(1, b)$ y $(-1, 1/b)$.
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es $b > 1$

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Cuando la base es $0 < b < 1$

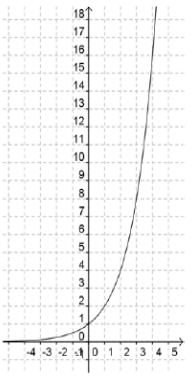
Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Actividades resueltas

- Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

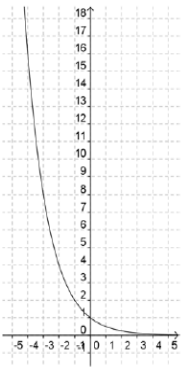
Función $y = 2^x$

x	y
...	...
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...



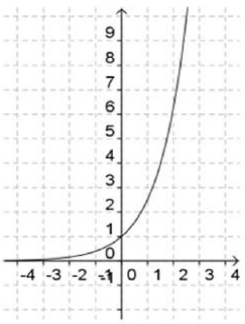
Función $y = 2^{-x}$

x	y
...	...
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
...	...

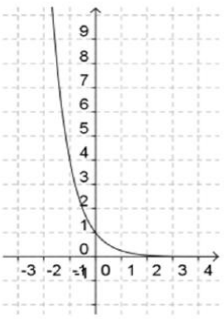


- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



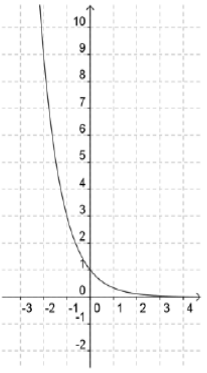
Solución:

Ambas son funciones exponenciales porque pasan por el punto (0, 1) y tienen por un lado como asíntota horizontal el eje OX, mientras que por el otro lado tienden a + ∞.

La función (a) es $y = 2.5^x$ porque pasa por el punto (1, 2.5).

La función (b) es $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa por el punto (–1, 4).

- Representa la función $y = 3^{-x}$



Solución:

Por tener exponente negativo es:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}.$$

Por tanto su gráfica es la del margen.

Observa que pasa por los puntos (–1, 3), (0, 1) y (1, 1/3).

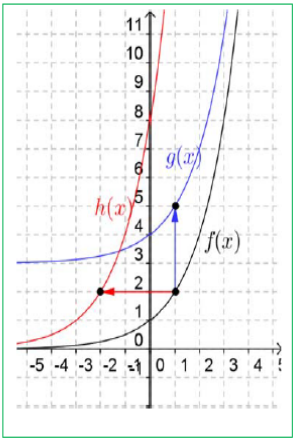
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto anteriormente, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x + 3$ y $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

La función *g(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia arriba 3 unidades.

La función *h(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia la izquierda 3 unidades.

Por tanto sus gráficas son estas, representadas en diferente color:



1.3. El número *e*. La función e^x

El número *e* tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Es un número irracional.

El número *e* se define como el límite cuando *n* tiende a infinito de la siguiente sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Su valor aproximado es *e* = 2.71828182846...

Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico).

Con la ayuda de la calculadora se puede comprobar cómo los valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se acercan cada vez más al valor *e* = 2.71828182846... a medida que aumenta el valor de *n*.

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de *e* con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta *e* pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

El cálculo financiero de los intereses se basa en el número ***e***.

Si se invierte un capital C con un interés del 100 % anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtiene un capital 2C. Si los intereses se pagan semestralmente, el capital se transforma en: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C = 2.25\ C$. *Si los intereses se pagan trimestralmente, se obtiene* $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdot C = 2.44\ C$. *En caso de pagos mensuales, el capital que se obtiene es* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \cdot C =$ 2.61 C y si *los pagos son diarios se consigue:* $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cdot C = 2.71\ C$.

Al aumentar la cantidad de períodos de pago el factor que multiplica al capital *C* se aproxima al número *e* = 2.7182818284...

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.1. Definición y cálculo elemental de logaritmos

Recuerda que:

La expresión $\log_b a$ se lee "logaritmo de a en base b".

$\log_b a$ es el exponente al que hay que elevar "b" para que el resultado sea "a".

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

"b" se llama **base** y "a" se llama **argumento**.

Observaciones:

- La base tiene que ser un número positivo y distinto de la unidad.
- El argumento tiene que ser positivo y distinto de 0.

Ejemplos:

a) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un par de propiedades elementales

- ✓ El logaritmo de la base siempre vale 1: $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- ✓ El logaritmo de 1 en cualquier base siempre vale 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmos inmediatos

Se llaman así los que se calculan directamente aplicando la definición.

Ejemplos:

- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- $\log 10\,000 = 4$ porque $10^4 = 10\,000$.

Cuando no se escribe la base quiere decir que la base es 10 (*log* x). Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales**. Los logaritmos en base e se llaman logaritmos neperianos y se escriben *ln x*.

Otros logaritmos no son inmediatos pero se pueden calcular también aplicando la definición, **igualando exponentes**. Esto pasa cuando la base y el argumento son potencias del mismo número.

Ejemplos:

- Para hallar $\log_4 8$ ponemos $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Para hallar $\log_4 32$ ponemos $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Actividades resueltas

- Halla los siguientes logaritmos: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d) $\log 1/100$; e) $\log_3 0.111...$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; y calcula el valor de x en las siguientes igualdades: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Soluciones:

a) $\log_4 256 = 4$, porque $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = -5$, porque $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

c) $\log_2 1/2 = -1$, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

d) $\log 1/100 = -2$, porque $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

e) $\log_3 0.111... = -2$, porque $0.111... = 1/9$, y entonces $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

f) $\log_3 3 = 1$, porque $3^1 = 3$ (el logaritmo de la base siempre vale 1)

g) $\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$ (el logaritmo de 1 siempre vale 0).

h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$.

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0.1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0.1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4\,096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4\,096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1\,000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1\,000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ no existe solución, porque ninguna potencia da 0 como resultado.

l) $\log (-100) = x$ no existe solución, porque el resultado de calcular una potencia de base positiva siempre es positivo.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.1.2. Logaritmos decimales y neperianos con la calculadora

Hasta aquí hemos aprendido a calcular logaritmos utilizando la definición. Sin embargo solamente se puede hacer así en unos pocos casos (en concreto cuando el argumento es una potencia de la base del logaritmo).

Por ejemplo no se pueden calcular $log_4 35$, $log_{10} 7$, $log_4 30$, $log_9 5$.

Las calculadoras científicas disponen de teclas para hallar únicamente dos o tres tipos de logaritmos (según el modelo de calculadora):

Logaritmos decimales (en base 10):	Logaritmos neperianos (en base *e*): **Logaritmos neperianos** son los que tienen como base el número $e = 2.718281...$ También se llaman **logaritmos naturales**. Los logaritmos neperianos se escriben de tres modos: $\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$
Logaritmos en cualquier base: En algunas calculadoras puede hallarse directamente poniendo la base y el argumento.	

Ejemplos:

- Comprueba con tu calculadora que $log\ 7 = 0.845$ y que $\ln 7 = 0.946$ (valores redondeados).
- Comprueba también que $\log 10 = 1$ y que $\ln e = 1$.

Para **calcular un número conociendo su logaritmo** se emplean las mismas teclas utilizando previamente la tecla de función inversa (normalmente *SHIFT* o *INV*).

Ejemplos:

- Comprueba con tu calculadora que el número cuyo logaritmo decimal vale 1.36 es 22.9 y que el número cuyo logaritmo neperiano vale 1.36 es 3.896.

2.1.3. Cambio de base de logaritmos

Con la calculadora también se pueden calcular logaritmos que no sean decimales ni neperianos, es decir, en bases distintas a "10" y "*e*".

Para ello se emplea la **fórmula del cambio de base**:

Para cambiar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

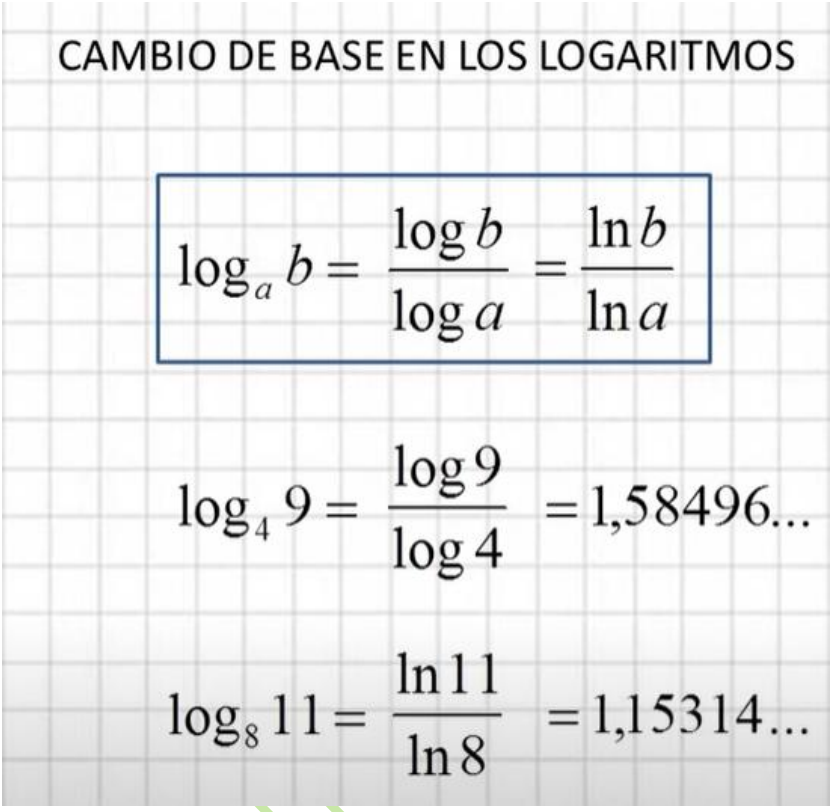
Ejemplo:

- Para calcular $log_4 7$ utilizando la calculadora hacemos $log_4 7 = \frac{log_{10} 7}{log_{10} 4} = \frac{0.845}{0.602} = 1.40$

Actividades propuestas

11. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base, y compara los resultados con los obtenidos en la actividad:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0.125$ f) $\log_3 \frac{1}{9}$.



Los cambios de base tienen sentido para convertir logaritmos de cualquier base, a logaritmo de base decimal o a base neperiana.

La razón, de puro simple, tontorrona. Los logaritmos decimales o los neperianos se pueden calcular fácilmente usando la calculadora científica o las clásicas tablas de logaritmos.

2.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos son las siguientes:

- $\log_b 1 = 0$ ya que $b^0 = 1$ (el logaritmo de 1 en cualquier base es 0)
- $\log_b b = 1$ ya que $b^1 = b$ (el logaritmo de la base es 1)

- El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritmo de un **cociente** es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

Ejemplo:

$\log_2 10 + \log_2 3.2 = \log_2 (10 \cdot 3.2) = \log_2 32 = 5$

$\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

$\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

$\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \frac{1}{5} \log_3 9 = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}.$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

$$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$$

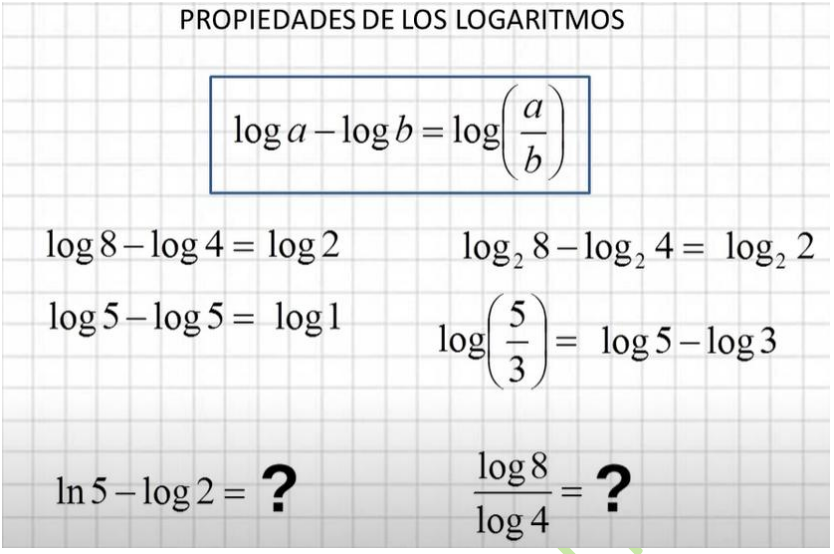
$\log 6 + \log 4 = \log 24$ $\quad$ $\log_2 6 + \log_2 4 = \log_2 24$

$\log 5 + \log 2 = \log 10$ $\quad$ $\ln 5 + \ln 2 = \ln 10$

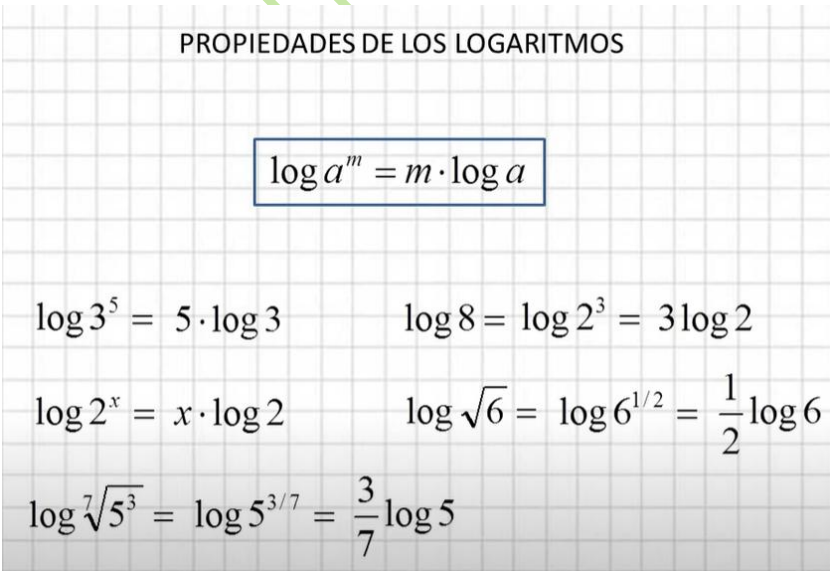
$\log(2x) = \log 2 + \log x$

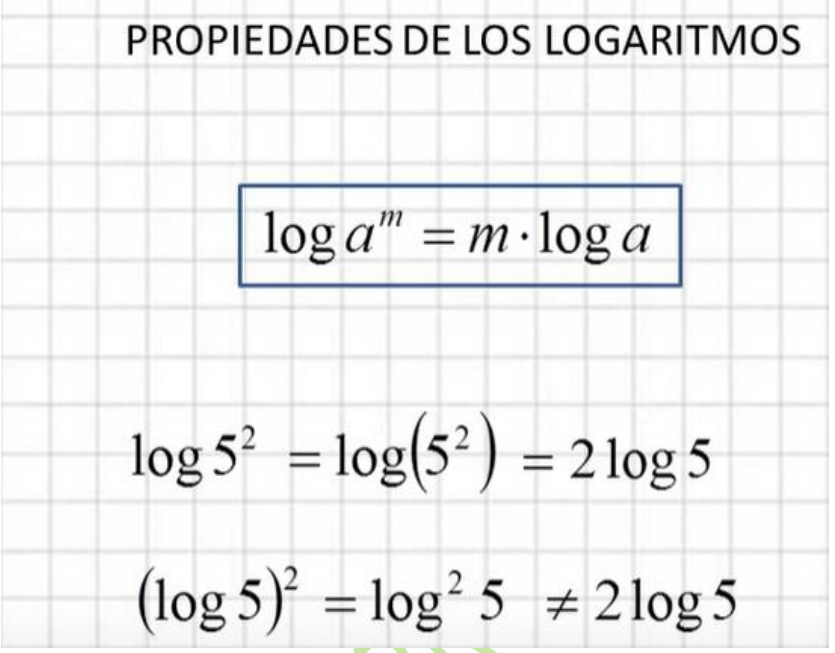
$\log 5 + \log_3 2 = ?$ $\quad$ $\log 5 \cdot \log 2 = ?$

En los casos con el interrogante, la propiedad NO se cumple, en el primer caso porque la suma de los logaritmos es de diferente base, mientras que en el segundo es una multiplicación de logaritmos.



En los casos con el interrogante, la propiedad NO se cumple, en el primer caso porque la resta de los logaritmos es de diferente base (decimal menos neperiano), mientras que en el segundo es una división de logaritmos.





No es lo mismo el logaritmo de 5 al cuadrado que el logaritmo al cuadrado de 5. En el primer ejemplo el cuadrado va con el 5, y se cumple la propiedad, mientras que en el segundo ejemplo el cuadrado va con el logaritmo, no con el 5, por eso en este segundo caso, la propiedad No se cumple.

RAMON FERR

2.2.1. Expresiones logarítmicas y algebraicas

Las propiedades de los logaritmos se emplean en dos tipos importantes de operación:

- **Tomar logaritmos** en una igualdad es aplicar el logaritmo a ambos miembros de la misma:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmos** en una igualdad es lo contrario: conseguir que una expresión logarítmica deje de serlo. Para esto es necesario que cada miembro tenga un único logaritmo:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Actividades resueltas

- Sabiendo que $\log 2 = 0.301$, calcula:
  a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0.301 = 1.505$
  b) $\log 0.008 = \log (8/1000) = \log 8 - \log 1000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0.301 - 3 = -2.097$

Observa que el logaritmo en base 10 de la unidad seguida de ceros es igual al número de ceros que tenga.

- Sabiendo que $\log 2 = 0.301$ y que $\log 3 = 0.477$ calcula:
  a) $log\ 6 = log(3 \cdot 2) = log\ 3 + log\ 2 = 0.301 + 0.477 = 0.778$
  b) $log\ 180 = log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2\,log\ 3 + log\ 2 + log\ 10 = 2 \cdot 0.477 + 0.301 + 1 = 2.255$
  c) $log\ 15 = log(3 \cdot 5) = log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = log\ 3 + log\ 10 - log\ 2 = 0.477 + 1 - 0.301 = 1.176$

- Toma logaritmos y desarrolla:
  a) $a = \dfrac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \dfrac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$
  b) $a = \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \dfrac{3}{2} \log b + \dfrac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina los logaritmos:

a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$

b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2}\log 5 - 3\log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log \sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2\log b - \frac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1\,000a) = \log \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}} \Rightarrow 1\,000a = \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resuelve la siguiente **ecuación logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solución:

Para resolverla es preciso eliminar logaritmos:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

La ecuación queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 2/3$.

La segunda solución no es válida porque al sustituirla en la ecuación original quedaría log $(x - 1)$ como logaritmo de un número negativo, que no existe. Esto ocurre a veces en las ecuaciones logarítmicas, igual que en las ecuaciones irracionales, y por ello es necesario comprobar la validez de las soluciones halladas.

- En el cálculo de **interés compuesto** el interés producido cada periodo de tiempo pasa a formar parte del capital. Así, si el periodo de tiempo es un año, la fórmula del interés cada año se calcula sobre un nuevo capital, que es el capital anterior más los intereses producidos en el año. Por tanto, si el porcentaje de interés anual es *r*, el capital cada año se multiplica por $1+\frac{r}{100}$.

  Por ejemplo, si el interés es del 4 % hay que multiplicar por 1.04 cada año transcurrido.

  La fórmula del capital acumulado al cabo de *n* años es: $C_n = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

  Calcula el capital final acumulado al cabo de 4 años para 6 000 € al 2 % de interés compuesto anual.

Solución:

$C = 6\,000 \cdot (1 + 0.02)^4 = 6\,000 \cdot 1.02^4 = 6\,494.59$ €.

- ¿A qué interés compuesto hay que invertir 10 000 euros para obtener en 10 años al menos 16 000 euros?

$$16\,000 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1.6 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[10]{1.6} = 1.048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0.048$$

Así pues, $r = 4.8$ %.

- Cuando la incógnita es el número de años (que está en el exponente) necesitamos tomar logaritmos para resolverlo: Si ingresamos en un banco 3 000 € al 4 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años tienen que pasar para conseguir 4 500 €?

$4\,500 = 3\,000 \cdot (1 + 0.04)^n \Rightarrow 1.5 = 1.04^n \Rightarrow \log 1.5 = n \log 1.04 \Rightarrow n = \frac{log\ 1.5}{log\ 1.04} = 10.34$ años (tendremos que esperar 11 años).

- La fórmula del interés compuesto también se utiliza para los problemas de **crecimiento o decrecimiento de poblaciones**, que es una función exponencial: Por ejemplo, si la población de un país aumenta un 3 % cada año y actualmente tiene 15 millones de habitantes, ¿cuántos tendrá al cabo de 5 años?

$$15\,000\,000 \cdot (1 + 0.03)^5 = 15\,000\,000 \cdot 1.03^5 = 17\,383\,111 \text{ habitantes.}$$

2.3. Funciones logarítmicas

2.3.1. Gráfica y características

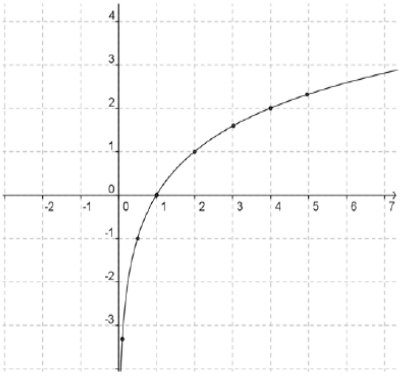
Las funciones logarítmicas son las del tipo $y = \log_b x$.

Hay una función distinta para cada valor de la base b.

Ejemplos:

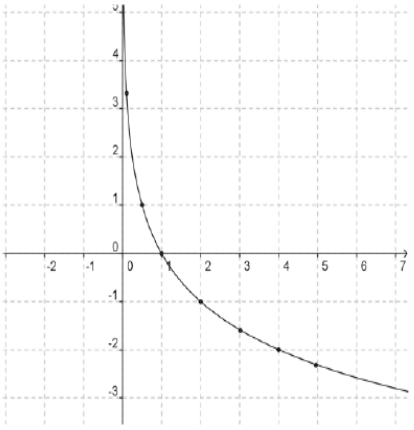
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

x	$\log_2 x$
0.1	-3.3
0.5	-1.0
0.7	-0.5
1	0.0
2	1.0
3	1.6
4	2.0
5	2.3
...	...



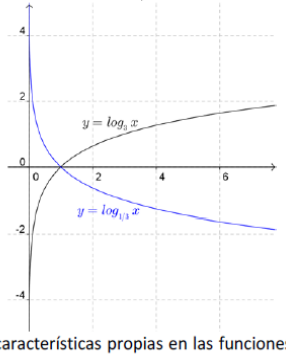
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_{1/2} x$ son las siguientes:

x	$\log_{1/2} x$
0.1	3.3
0.5	1.0
0.7	0.5
1	0.0
2	-1.0
3	-1.6
4	-2.0
5	-2.3...
...	



Las características de estas gráficas nos permiten deducir las de las funciones logarítmicas en general, que son las siguientes:

- Su **dominio** es (0, +∞). Es decir, solo están definidas para "x" positivo.
- Son continuas.
- Su **recorrido** es toda la recta real.
- Pasan por los puntos (1, 0), (b, 1) y (1/b, –1).
- La gráfica de $y = \log_b x$ y la de $y = \log_{1/b} x$ son simétricas respecto del eje OX.



Por otra parte observamos unas características propias en las funciones en ambas ilustraciones, según sea la base del logaritmo mayor o menor que la unidad.

Cuando la base es $b > 1$:

- Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $-\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte negativa del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

Cuando la base es $0 < b < 1$:

- Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $+\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte positiva del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

2.3.2. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Según la definición del logaritmo tenemos la siguiente relación: $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$

Las funciones logarítmica y exponencial llevan intercambiado el lugar de la "x" y la "y". Por tanto son **funciones inversas.**

En consecuencia, si partimos de un número y le aplicamos la función logarítmica, y luego al resultado le aplicamos la función exponencial volvemos al número de partida. Lo mismo ocurre si primero aplicamos la función exponencial y después la logarítmica.

Ejemplo:

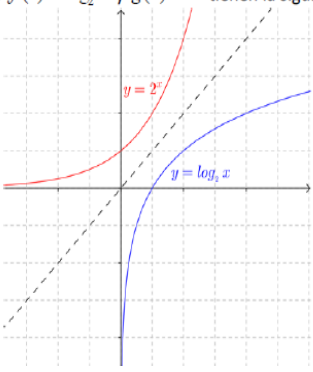
- Partiendo del número 3, utilizando la calculadora aplicamos una función logarítmica: $log_5 3 = 0.6826$ (recuerda la fórmula de cambio de base). A continuación, aplicamos la función exponencial: $5^{0.6826} = 3$ y obtenemos el número del principio.
- Haciéndolo en sentido inverso, partiendo del número 3 aplicamos primero una función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación, aplicamos la función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ y también hemos obtenido el número del principio.

Cuando dos funciones son inversas sus gráficas son **simétricas**, siendo su eje de simetría la bisectriz del primer cuadrante.

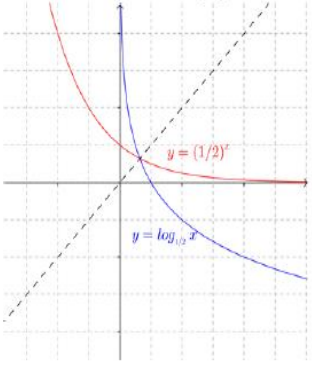
Esto se debe a que si el punto (*a*, *b*) es de la gráfica de una de ellas, el punto (*b*, *a*) pertenece a la gráfica de la otra.

Ejemplos:

- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ tienen la siguiente simetría:



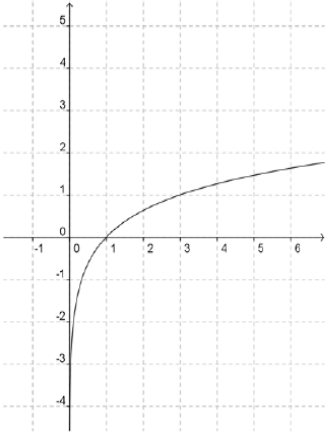
- Las gráficas de las funciones $f(x)=\log_{1/2} x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ tienen la siguiente simetría:



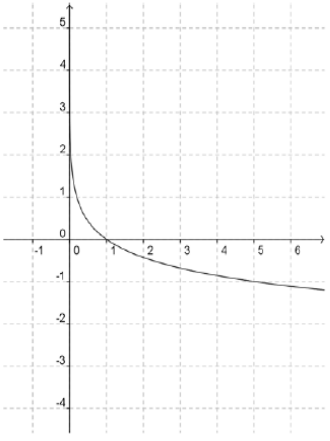
Actividades resueltas

- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas son funciones logarítmicas porque pasan por el punto (1, 0) y tienen como asíntota vertical el eje OY (bien sea en su parte positiva o negativa) y por el otro lado tienden a ∞.

La función (a) es $y=\log_3 x$ porque pasa por el punto (3, 1) y por (1/3, –1).

La función (b) es $y=\log_{1/5} x$ porque pasa por el punto (5, –1) y por (1/5, 1).

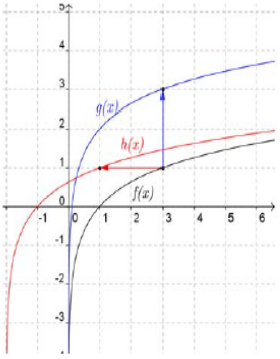
- Conociendo la gráfica de la función $f(x)=\log_3 x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x)=\log_3 x+2$ y $h(x)=\log_3(x+2)$.

Solución:

La función $g(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia arriba 2 unidades.

La función $h(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia la izquierda 2 unidades.

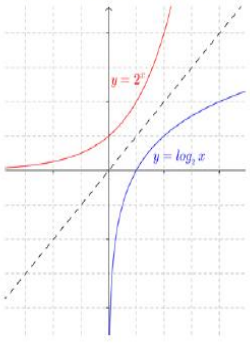
Por tanto sus gráficas son estas:



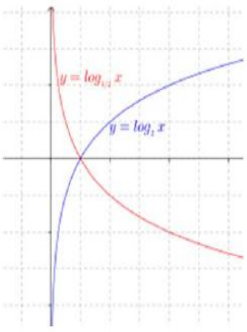
- Representa la función $y=\log_2 x$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y=2^x$, $y=\log_{1/2} x$, y utilizando también $y=2^x$ representa $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución:

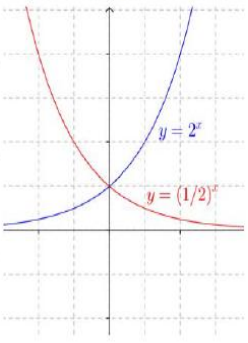
Por la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante:



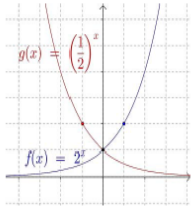
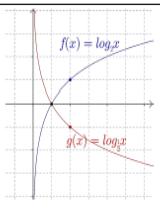
Por la simetría respecto al eje OX:



Por la simetría respecto al eje OY:



RESUMEN

Noción	*Definición*	*Ejemplos*
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos los números reales. Recorrido: Todos los números reales positivos. Continua en todo el dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(0, 1), (1, b), (-1, 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementales: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$log_4 7 = \frac{log\, 7}{log\, 4} = 1.40$
Operaciones con logaritmos	Logaritmo de un producto: $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ Logaritmo de un cociente: $\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$ Logaritmo de una potencia: $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$	$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\frac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: T Todos los números reales positivos. *Recorrido*: Todos los números reales. **Continua** en todo el dominio Asíntota vertical: $x = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(1, 0), (b, 1), (1/b, -1)$	

RAMON

Índice

1. NÚMEROS ENTEROS

1.1. NÚMEROS POSITIVOS, NEGATIVOS Y CERO

1.2. DONDE APARECEN LOS NÚMEROS NEGATIVOS

1.2. QUE SON

1.3. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

1.4. OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.1. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA Y ORDEN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

3. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

3.1. SUMA DE NÚMEROS ENTEROS

3.2. RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

3.3. OPERACIONES COMBINADAS DE SUMAS Y RESTAS

3.4. PRODUCTO Y COCIENTE DE NÚMEROS ENTEROS

3.6. POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

3.7. OPERACIONES COMBINADAS. JERARQUÍA DE OPERACIONES

RAMON FE

1. NÚMEROS ENTEROS

1.1. Números positivos, negativos y cero

Existen ocasiones de la vida cotidiana en que es preciso usar números distintos de los naturales, números positivos y negativos. Los números naturales no resultar ser suficientes.

Por ejemplo, si tienes 20 euros y gastas 25 euros, ¿de cuántos euros dispones? Tienes una deuda de 5 €, y por lo tanto tienes una cantidad negativa de dinero.

Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplo 1:

- Al hacer las cuentas de tu dinero puedes indicar con números positivos lo que recibes y con negativos lo que gastas. Así, si recibes 10 € de paga semanal lo indicarás (+10) y si gastas 1 € en un helado lo indicarás (–1) €. Si te quedas sin dinero dirás que tienes 0 €.

Ejemplo 2:

- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 ºC, mientras que si se dice que hace 9 grados, se indica +9 ºC.

Ejemplo 3:

- Se dice que el monte Niblock mide 2 976 m, mientras que una sima marina, por ejemplo la fosa de las Marianas, la más profunda del mundo, que está a 11 516 m bajo el nivel del mar, se indica diciendo que está a –11 516 m. El nivel del mar es el nivel 0.

Ilustración de INTEF

RAMON FERR

Los **números enteros** son una ampliación de los números naturales:

- Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5...
- Los enteros negativos van precedidos del signo –: –1, –2, –3....
- El cero es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por **Z**.

$$Z = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \ldots\}$$

Al escribir un número entero positivo no se suele escribir su signo: + 2 = 2; +6 = 6.

Actividades propuestas

3. Indica el significado de los números –5, 0 y +3 en cada una de las situaciones siguientes:

a) En un ascensor b) En un termómetro c) En una cuenta

1.3. Valor absoluto de un número entero

La distancia que separa un número entero del cero se define como **valor absoluto** del número.

- Es siempre un número positivo (o cero).
- Se escribe entre dos barras | |.

Ejemplo 4:

- El valor absoluto de +3, es 3, y se escribe: |+3| = 3; el valor absoluto de –7 es 7, por tanto |–7| = 7, del mismo modo: |+8| = 8, |–5| = 5.

Actividades propuestas

4. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) |+9| b) |–11| c) |0| d) |–6|

$|+4| = 4$

$|-2| = 2$

1.4. Opuesto de un número entero

El **opuesto** de un número entero es otro número entero de igual valor absoluto y distinto signo.

Lo opuesto de "deber" es "tener". Lo opuesto de 5 m de altura es 5 m bajo el nivel del mar. Lo opuesto de 4º C es 4º bajo cero, etc.

Se escribe: Op(+a) = –a, Op(–a) = +a o bien: – (+a) = –a, –(–a) = +a

Ejemplo 5:

- Op(+3) = –3 Op(–8) = +8 – (+3) = –3 –(–8) = +8

Observa que...

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

Ejemplo: **+5 y -5**

Actividades propuestas

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

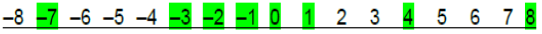
2.1. Representación en la recta numérica y orden en el conjunto de los números enteros

Los números enteros se representan en la recta numérica así:

1. Debemos trazar una recta horizontal y marcamos el cero, que se llama origen
2. Dividimos la recta en segmentos iguales, de longitud 1
3. Colocamos los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

Ejemplo 6:

- Representa en una recta numérica: –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 y 1



De esta forma quedan ordenados los números enteros. Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

Ejemplo 7:

- –7 está más a la izquierda que +4 por tanto –7 es menor que +4. Se escribe –7 < +4

El signo **<** se lee "menor que" y el signo **>** se lee "mayor que".

Ejemplo 8:

- Podemos ordenar números utilizando los signos anteriores:

$$-7 < -3 < -2 < -1 < 0 < 2 < 4 < 8.$$

O bien:

$$8 > 4 > 2 > 0 > -1 > -2 > -3 > -7.$$

Parece raro que el 0 sea mayor que otro número, pero piensa que se tiene más si no se tiene nada, que si se debe dinero. Si el termómetro marca 0 º C no hace mucho calor, pero menos calor hace si marca – 7 º C. Es decir: 0 > – 7

Consejo de Ramón:

Es fácil liarse entre **<** y **>**. Para aprender a distinguirlas, colócales mentalmente una raya en la parte abierta y léelas como si fueran Flechas.

Si a **>** le añades una raya a la parte abierta te queda --> y eso es una flecha hacia la derecha que se lee "**mayor que**". Y si haces lo mismo con **<**, le añades una raya a la parte abierta y te queda <-- (flecha hacia la izquierda) que se lee "**menor que**".

Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

5

3. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

3.1. Suma de números enteros

Ejemplo 9:

- Tienes 12 € y te dan 5 € entonces tienes 17 €: **+12 + 5** = **+17**.
- Debes 12 € y gastas 5 € entonces acumulas una deuda de 17 €: **–12 – 5 = –17.**

Para **sumar** dos números enteros de igual signo se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos

- Tienes 12 € pero debes 5 € entonces tienes 7 €: **–5 + 12 = +7.**
- Debes 12 € y tienes 5 € entonces debes 7 €: **–12 + 5 = –7.**

Para **sumar** dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto

Suma de tres o más enteros

Se puede sumar 3 o más enteros mediante dos procedimientos:

1) Se suman los dos primeros sumandos y se suma el tercer sumando al resultado:

Ejemplo 10:

+8 – 5 + 2 = + 3 + 2 = +5

En el caso de 4 sumandos se pueden sumar de dos en dos:

Ejemplo 11:

+8 – 5 + 2 – 6 = + 3 – 4 = –1

2) Se suman los positivos por un lado (**tengo**) y los negativos (**debo**) por otro y finalmente se obtiene el resultado:

Ejemplo 12:

Debo tengo debo tengo debo
–12 + 19 – 4 = +19 – 16 = +3

tengo debo tengo debo tengo debo
+8 – 5 + 2 – 3 = + 10 – 8 = +2

Observa que al sumar números enteros puedes hacerlo en cualquier orden y siempre se obtiene el mismo resultado. Y puedes asociar los términos como más te convenga y el resultado será el mismo.

TABLA DE SUMAS

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Una tabla de sumas funciona de la siguiente manera:

Escoge en la columna de la izquierda el primer número que desees sumar.

Escoge en la fila superior el segundo número que desees sumar.

Sigue la línea hasta que encuentres la casilla en la que se juntan ambos números, y ya lo tienes.

En el ejemplo hemos sumado 5 + 3 o 3 + 5, como prefieras mirarlo, puesto que el orden de los factores no altera el resultado, tanto en las sumas como en las multiplicaciones.

3.2. Resta de números enteros

Para **restar** dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo 13:

Observa los cuatro casos siguientes:

$(+12) - (+7) = (+12) + op(+7) = (+12) + (-7) = +5$

$(+12) - (-7) = (+12) + op(-7) = (+12) + (+7) = +19$

$(-12) - (+7) = (-12) + op(+7) = (-12) + (-7) = -19$

$(-12) - (-7) = (-12) + op(-7) = (-12) + (+7) = -5$

El signo **menos delante de un paréntesis** cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

Ejemplo 14:

Vamos a comprobar esa propiedad realizando de dos formas distintas las operaciones:

- Calculamos primero el paréntesis:

$$(+12) - ((-4) + 7) = (+12) - (+3) = +9$$

- Cambiamos primero los signos

$$(+12) - ((-4) + 7) = (+12) + ((+4) + (-7)) = (+12) + (-3) = +9$$

Actividades propuestas

14. Un autobús comienza el viaje con 45 pasajeros. En la primera parada se bajan 7 y se suben 12. En la segunda se bajan 10 y se suben 8, y en la tercera se bajan 4. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

Expresiones sencillas con paréntesis

El signo más (**+**) indica suma o que el número es positivo, y el signo menos (**–**) indica resta o que el número es negativo. Si se quiere escribir "*sumar al **8** el número **–3***" no es correcto escribir **8** + **–3**, lo correcto es escribir: **8** + (**–3**) añadiendo un paréntesis. Del mismo modo para escribir "*restar al **7** el número **–3***", no es correcto **7** – **–3**, se debe escribir **7** – (**–3**) añadiendo el paréntesis.

La **resta** es la operación inversa a la suma:

$$y - b = z \qquad 5 - 2 = 3$$

donde "y" se llama *Minuendo*, "b" se llama *sustraendo* y el resultado "c" se denomina *diferencia.*

El resultado puede dar un numero positivo o uno negativo, caso que el sustraendo sea un numero mayor que el minuendo

$$7 - 9 = -2$$

Otra manera de definir la resta es decir que es la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo

$y + (-b) = z \qquad 5 + (-2) = 3$

3.3. Operaciones combinadas de suma y restas

En las operaciones de sumas y restas combinadas, como el siguiente:

$$(+2) + (-1) - (+3) - (-5) + (-8)$$

Debemos:

1º) Eliminar los paréntesis

2º) Operar adecuadamente los números resultantes

Recuerda que:

$+(+a) = +a$

$+(-a) = -a$

$-(+a) = -a$

$-(-a) = +a$

Ejemplo 15:

$(+2) + (-1) - (+3) - (-5) + (-8) = +2 - 1 - 3 + 5 = 7 - 4 = +3.$

$(+8) - (+3) + (-2) = +8 - 3 - 2 = 8 - 5 = +3.$

$(-7) + (-3) - (-5) = -7 - 3 + 5 = -10 + 5 = -5.$

$(-4) - (-7) + (-5) - (-1) = -4 + 7 - 5 + 1 = -9 + 8 = -1.$

$(-5) + (-6) - (-2) + (-3) = -5 - 6 + 2 - 3 = -14 + 2 = +12$

Como resumen a la regla de los signos, decir que la operación entre signos idénticos siempre da un resultado positivo, mientras que la operación entre signos diferentes siempre da un número negativo.

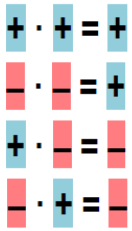
3.4. Producto y cociente de números enteros

Para **multiplicar** dos números enteros se debe:

1º) Multiplicar sus valores absolutos

2º) Aplicar la **regla de los signos** siguiendo lo siguiente:

Es decir, se asigna el signo **+** si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo **–** si tienen distinto signo.



Ejemplo 16:

(+6) · (+4) = +24
(–3) · (–4) = +12
(+5) · (–3) = –15
(–7) · (+5) = –35

Ejemplo 17:

- Luis gana 20 euros al mes, si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará al cabo de 5 meses?

(+20) · (+5) =+100 € ahorrará al cabo de 5 meses.

Ejemplo 18:

- El recibo mensual es de 30 euros al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 7 meses?

(–30) · (+7) = –210 € gastará al cabo de 7 meses.

Ejemplo 19:

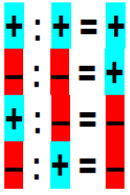
- Eva gasta 10 euros al mes en golosinas. Deja de comprarlas durante 3 meses. ¿Cuánto ha ahorrado?

(–10) · (–3) = +30 € ahorrará al cabo de 3 meses.

Para **dividir** dos números enteros se debe:

1º) Calcular el cociente de sus valores absolutos

2º) Asignar al resultado un signo mediante la siguiente regla:



Ejemplo 20:

(+25) : (+5) = +5
(–16) : (–2) = +8
(+21) : (–3) = –7
(–36) : (+9) = –4

División de números enteros

Se dividen los valores absolutos de los números y se añade el signo + o – según la regla de los signos:

La división de dos números enteros no es siempre un número entero.

$$\frac{(+)}{(+)} = (+) \quad \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\frac{(+)}{(-)} = (-) \quad \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

3.7. Potencias de números enteros

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo 21:

$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$

$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Ejemplo 22:

$(-5)^2 = +25$

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

Ejemplo 23:

$(-5)^3 = -125$

3.7. Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones

En las operaciones combinadas es preciso tener en cuenta la **jerarquía de las operaciones**:

1ª) Se resuelven las operaciones que estén dentro de paréntesis
2º) Se realizan las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha
3º) Se efectúan las sumas y las restas

Ejemplo 24:

Jerarquía de operaciones	$[(+4-5)\cdot(+3-7-2)]+(-9):(-3)+5$
1) Se resuelven los paréntesis	$[(-1)\cdot(-6)]+(-9):(-3)+5$
2) Se realizan multiplicaciones y divisiones	$[+6]+(+3)+5$
3) Se efectúan sumas y restas	Resultado = 14

Otras dos formad de explicar la jerarquía de las operaciones.

2. Jerarquía de las operaciones

Cuando mezclamos las operaciones, éstas se deben resolver en un orden.

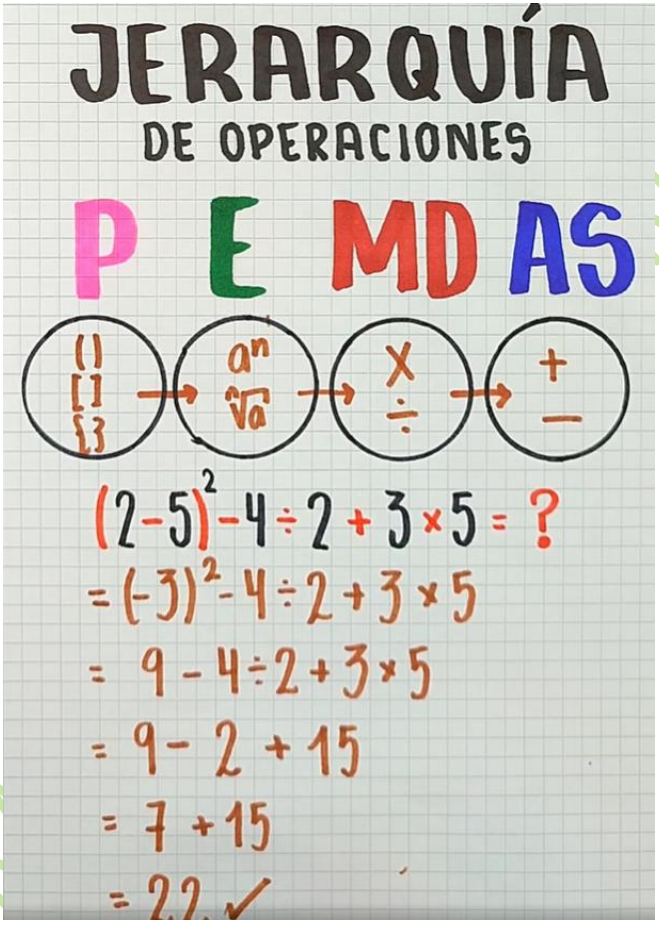
Primero. Paréntesis, corchetes y llaves. (Se simplifica al máximo las operaciones que están dentro).

Segundo. Potencias

Tercero. Multiplicaciones y divisiones

Cuarto. Sumas y restas.

El orden de prioridad en la resolución *es el siguiente y lo puedes recordar, usando la palabra* ***PEMDAS (P****ere* ***E****xplica* ***M****atemáticas a* ***D****iana,* ***A****miga de* ***S****andra):*



1) **P**aréntesis
2) **E**xponentes (Potencias y Raíces)
3) **M**ultiplicaciones y **D**ivisiones.
4) **A**diciones (Sumas) y **S**ustracciones (Restas).

https://www.facebook.com/JuegosMatematicosOficial/videos/671906558321784

RESUMEN

Números positivos, negativos y cero.	Los primeros llevan un signo + o no llevan signo, los segundos un signo -. El cero no	+2; 3; –5; 0
	tiene signo.	
Números enteros	Z = {... –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 ... }	
Valor absoluto de un número	Es su distancia al cero.	|+4| = 4; |–8| = 8.
Números opuestos	Tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo.	Op(+5) = –5; Op(–9) = +9
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	410 > 20 > 0 > –21 > –43 –5 < –3
Suma de números del mismo signo	Se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo.	(+3) + (+9) = +12 (–4) + (–6) = –10
Suma de números enteros de distinto signo	Se restan sus valores absolutos y se pone el signo del de mayor valor absoluto.	(–2) + (+8) = +6 (–9) + (+2) = –7
Sustracción	Se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.	(–6)–(–3) = (–6)+(+3) = –3 (-4) – (+5) = (-4) + (-5) = -9
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: **+ · + = +; – · – = +; + · – = –; – · + = –**	(+4) · (+6) = +24 (–1) · (–8) = +8 (–3) · (+3) = –9 (+9) · (–3) = –27
Cociente	Se dividen sus valores absolutos y se aplica la misma regla de signos de la multiplicación.	(–16) : (–2) = +8 (+27) : (–3) = –9
Potencias de base negativa	Si el exponente es par, la potencia es positiva. Si el exponente es impar, la potencia es negativa	$(-2)^4 = +16$ $(-2)^3 = -8$

Índice

1. INTERPRETACIÓN DE UNA FRACCIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

1.2. TÉRMINOS DE UNA FRACCIÓN

2. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

2.1. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

2.2. FRACCIONES EQUIVALENTES

2.3. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

2.4. PROPIEDADES DE LA SUMA DE FRACCIONES

3. PRODUCTO Y COCIENTE DE FRACCIONES

3.1. REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN. FRACCIONES IRREDUCIBLES

3.2. PRODUCTO DE FRACCIONES

3.3. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE FRACCIONES

3.4. COCIENTE DE FRACCIONES

4. OTROS ASPECTOS DE LAS FRACCIONES

4.1. COMPARACIÓN DE FRACCIONES

4.2. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FRACCIÓN

4.3. FRACCIONES NEGATIVAS

Resumen

Seguro que ya has utilizado fracciones. Seguro que sabes que media docena de huevos son seis huevos, que un cuarto de hora son 15 minutos, incluso que tres cuartos de kilo son 750 gramos.

En este capítulo vas a familiarizarte con el uso de las fracciones aprendiendo a operar con ellas, a sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas. Para ello aprenderás cuando dos fracciones son equivalentes o se pueden simplificar...

LAS OPERACIONES CON FRACCIONES.

Una fracción es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad, es decir que representa un cociente no efectuado de números. Se representa por dos números separados por una línea de fracción. Toca aclarar que la parte de arriba se llama numerador y la parte de abajo se llama denominador.

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$ Por ejemplo: $\frac{5}{2}$

- Suma de fracciones con diferente denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a*d)+(b*c)}{(b*d)}$$

- Suma/Resta de fracciones con igual denominador: Se conserva el denominador y se suman o se restan los numeradores directamente.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

RAMON FERRER I MARÍ

- Resta de fracciones con diferente denominador: Se multiplican, en cruz, cada numerador con su denominador opuesto, y se restan entre ellos. Lo que salga se tiene que dividir por el producto de ambos denominadores.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a*d)-(b*c)}{(b*d)}$$

- Multiplicación de fracciones: Se multiplican entre sí, los numeradores y los denominadores, cada uno por su lado.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(a*c)}{(b*d)}$$

- División de fracciones con diferente denominador. Hay dos métodos:

El Cociente clásico, por el que se multiplican en cruz y luego se dividen entre sí, de esta guisa

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a*d)}{(b*c)}$$

O la multiplicación por la inversa de la segunda fracción, tal que así:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{(a*d)}{(b*c)}$$

RAMON FERRER I MARÍ

Herramientas útiles en la aritmética de fracciones con derivadas.

Por aquello de "*fer cultureta*" que decimos en Catalunya, es decir, ampliar los conocimientos, he explicado arriba las operaciones principales y más básicas que se hacen con fracciones.

De todos modos, aclarar que las operaciones que usaremos principalmente, en las derivadas con fracciones, son la suma y resta de fracciones de igual denominador y las multiplicaciones, por eso van destacadas en este amarillo tan chillón.

Pero hay otras herramientas básicas que debemos conocer y/o recordar.

Una fracción en la que las cifras del numerador y denominador coinciden, es siempre es igual a 1. Se llaman "fracciones iguales a la unidad".

$$\frac{a}{a}=1 \qquad \frac{4}{4}=1 \qquad \frac{36}{36}=1$$

ALERTA SPOILER: Por favor, quédate con esta "*copla*" porque nos va a venir de perlas, en cuanto nos metamos con el tema de las Derivadas con fracciones.

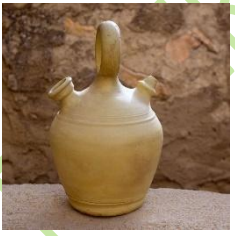
Te cuento: Puesto que como la segunda cosa que nos piden es reducir el exponente en un grado, es decir, en un 1, ese 1 siempre lo podemos expresar como una fracción igual a la unidad, con lo que el

RAMON FERRER NAVARRÍ

paso de reducir el exponente en un grado, lo convertimos en una simple resta de fracciones de igual denominador, por lo que conservaremos abajo el denominador (2), mientras que arriba, simplemente, restaremos el numerador (5) menos el denominador (2).

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a-b}{b} \Rightarrow x^{5/2} \qquad \frac{5}{2} \quad \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

Una solución más simple que la electrónica de un botijo.



https://www.65ymas.com/consejos/porque/por-que-el-botijo-es-un-sistema-perfecto-de-refrigeracion-y-esta-casi-en-desuso_5543_102.html

Multiplicación de un número por una fracción.

Estad muy atentos/as porque esta herramienta tiene dos variantes y todas son útiles e importantes. Primero empecemos por lo básico.

Tenemos un número multiplicando una fracción, por ejemplo:

$$a * \frac{b}{c} \qquad 3 * \frac{2}{3}$$

RAMON ORIOL I MARÍ

Para resolverlo se nos abren dos vías: una lenta y otra rápida.

No te preocupes, que te voy a explicar ambas.

Aconsejo que empieces por la lenta y, cuando cojas práctica, ya tomarás la vía rápida cuando toque.

VÍA LENTA: Lo que hacemos es colocar un 1 bajo el número, y procedemos a multiplicar, como si tal cosa

$$\frac{a}{1} * \frac{b}{c} = \frac{a*b}{1*c} \quad \text{o sea} \quad \frac{3}{1} * \frac{2}{5} = \frac{3*2}{1*5} = \frac{6}{5}$$

Siempre que la fracción lo permita, debemos recurrir a la máxima simplificación y para ello tenemos dos formas de hacerlo:

Forma 1: Dividir el numerador entre el denominador. Así pues, si dividimos 6 entre 3, nos da 2.

RAMÓN FERRER I MARÍ

$$\frac{6}{3} = 2$$

Forma 2: Podemos encontrarnos que, si dividimos el numerador entre el denominador, no nos dé un número entero. Pero como debemos buscar el número más pequeño de la fracción, hemos de mirar a ver si podemos dividir el numerador y el denominador entre un mismo número. A esta acción se le llama *simplificación.*

Por ejemplo:

Si tenemos $\frac{45}{35}$ podemos dividir numerador y denominador entre 5 y nos queda $\frac{9}{7}$ y lo dejamos así, porque no podemos seguir simplificándolo.

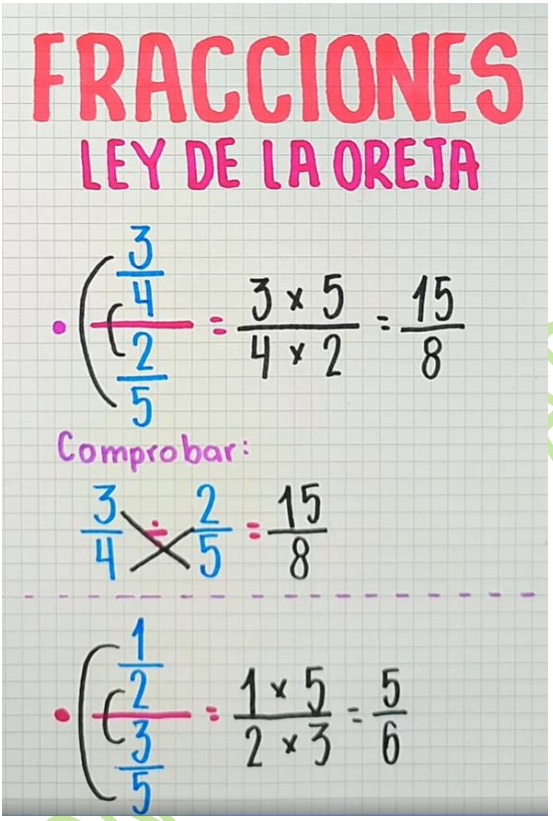
VÍA RÁPIDA: Esta vía es un auténtico "*chollo*", por lo rápida y sencilla que es, pero tiene una limitación: Solamente podemos usarla si el número y el denominador de la fracción COINCIDEN.

Así pues, lo que hacemos es que realizamos una simplificación a lo bestia, sin anestesia ni nada, porque al coincidir el número y el denominador, entre ellos "*se anulan*".

Volviendo al ejemplo que hemos usado en la Forma 1:

$3 * \frac{2}{3}$ el número y el denominador, entre ellos "*se anulan*" y nos queda $\not{3} * \frac{2}{\not{3}}$ con lo que el resultado final es 2.

RAMON FERRERI MARI



Consejo de Ramon:

Irás más rápido si, antes de aplicar la Ley de la Oreja, a la fracción del denominador (la de abajo), la inviertes, pasando de 2/5 a 5/2 y obtienes una multiplicación de fracciones directa, tal y como te expliqué en la página 140. La multiplicación por la inversa de la segunda fracción, tal que así:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{(a * d)}{(b * c)}$$

https://www.facebook.com/JuegosMatematicosOficial/videos/1131506904710952

NOCIÓN	*DESCRIPCIÓN*	*EJEMPLOS*
Fracción	Expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m*, el *numerador*, como *n*, el *denominador*, son números enteros. Leeremos *"m partido de n"*.	$\frac{5}{6}$, cinco sextos $\frac{30}{19}$, treinta diecinueveavos
Fracciones impropias	Fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador.	$\frac{2}{3}, \frac{15}{25}, \frac{10}{11}$
Suma y resta de fracciones con igual denominador	Realizamos la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantenemos el denominador común.	$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$ $\frac{13}{7}-\frac{8}{7}=\frac{13-8}{7}=\frac{5}{7}$
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{9}$
Producto de fracciones	Multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los denominadores.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 9}=\frac{5}{54}$
Cociente de fracciones	Multiplicamos la primera fracción por la que resulta de intercambiar el numerador y el denominador de la segunda fracción.	$\frac{3}{11}:\frac{5}{7}=\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{11\cdot 5}=\frac{21}{55}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Fracciones negativas	Podemos extender la noción de fracción para que tanto el numerador como el denominador puedan ser números enteros, distinto de cero el denominador.	$\frac{(-3)}{(-7)}=\frac{(-1)\cdot 3}{(-1)\cdot 7}=\frac{3}{7}$ $-\frac{4}{5}=\frac{(-4)}{5}=\frac{4}{(-5)}=(-1)\cdot\frac{4}{5}$

NÚMEROS DECIMALES.

Un **número decimal** consta de dos partes:

- su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma
- y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma

$$2'9 = 2 + \frac{9}{10} \qquad 0'3 = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$2'09 = 2 + \frac{9}{100} \qquad 0'035 = 0 + \frac{35}{1000} = \frac{35}{1000}$$

RESUMEN

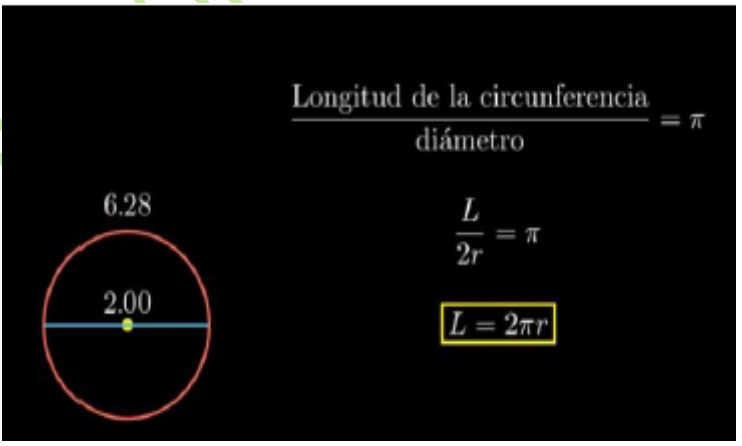
NOCIÓN		Ejemplos
Números decimales	Alternativa a las fracciones para expresar cantidades que no se corresponden con unidades completas. Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal	21'375 Parte entera: 21 Parte decimal: 375
Número decimal exacto	Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras	5'7767
Número decimal periódico	Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	Puro: $3'\overline{07} = 3'0707070.....$ Mixto: $4'8\overline{13} = 4'813131.....$
Paso de número decimal a fracción	Podemos expresar cualquier número decimal exacto o periódico en forma de fracción	$5'7767 = \frac{57767}{10000}$ $3'\overline{07} = 3 + \frac{7}{99} = \frac{304}{99}$ $4'8\overline{13} = 4 + \frac{813-8}{990} = \frac{4765}{990}$
Operaciones con números decimales	Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir	
Conversión en número decimal de una fracción	Podemos representar cualquier fracción mediante un número decimal, el cual podrá ser exacto o periódico (puro o mixto)	$\frac{11}{4} = 2'75$ $\frac{10}{11} = 0'\overline{90}$ $\frac{32}{15} = 2'1\overline{3}$
Truncamiento de un número decimal	Es una aproximación de un número decimal que consiste en eliminar su parte decimal a partir de cierta cifra decimal	Truncamiento en las centésimas de 21'375: 21'37
Redondeo de un número decimal	Es otra aproximación que, a diferencia del truncamiento, sí considera la primera cifra decimal eliminada	Redondeo hasta las centésimas de 21'375: 21'38

NÚMEROS IRRACIONALES: ESTUDIO DE PÍ, e, FI

Los números irracionales no son aquellos que se hayan vuelto locos o tenido un ataque de nervios 🤣🤣🤣.

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

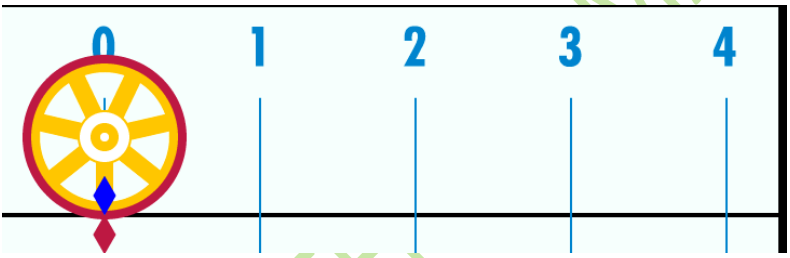
El número irracional más conocido es PI (π), cuyo valor es 3,141592 … que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y que se expresa mediante la fórmula $P=2\times\pi\times R$, con lo que, para un radio igual a una unidad, el diámetro valdrá 2 unidades y el valor de π ascenderá a 6,28 unidades.



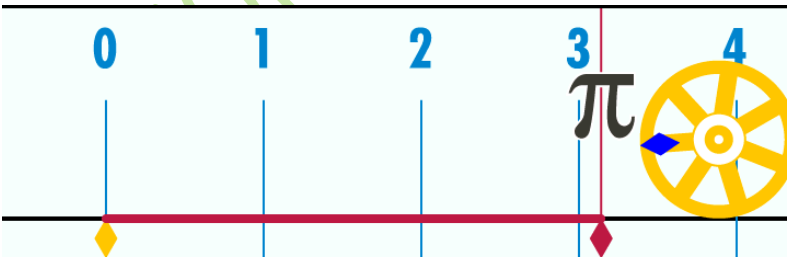
π es el más famoso de los números irracionales. Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. No se puede expresar en forma de fracción.

	Fórmules
Expressió algebraica	$\pi = \frac{L}{D}$

Es una constante porque se repite, no importa el tamaño de la circunferencia que contemplemos. Tomamos por ejemplo la rueda de una bicicleta. Si hacemos una marca en la goma, ubicada en el centro exacto de la banda que toca el suelo,



y la hacemos rodar una vuelta entera hasta que coincida en el mismo punto de contacto con el suelo,



Animación del desenrollado de la circunferencia de un círculo de diámetro uno, para ilustrar la proporción de π.

resulta que la distancia que hemos recorrido es de 3,14 veces su anchura (=diámetro).

Y esto es así siempre. Da lo mismo que hablemos de la rueda de una bicicleta, la ruedecita de un monopatín, la enorme rueda de un autobús o la rueda de la noria de un parque de atracciones.

3.1. Longitud de una circunferencia

El **número π** (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio *r*, entonces su diámetro mide 2*r*, y su longitud, por la definición de π, mide $2 \cdot \pi \cdot r$.

Longitud de la circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot r$.

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 3 *cm* tiene una longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6 \cdot \pi \approx 18{,}84$.

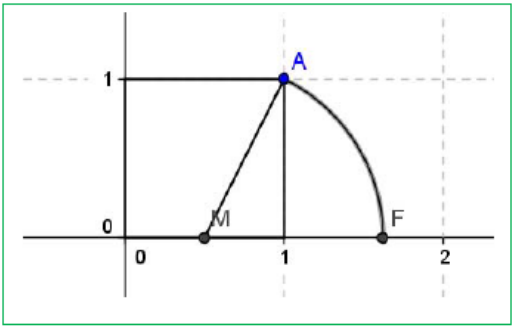
El siguiente número irracional más importante es el número e (𝑒), cuyo valor es 2,718281… que se usa, entre otros, en procesos de estudio del crecimiento en Biología, en la desintegración radiactiva, y cálculo de Intereses.

Si se invierte un capital C con un interés del 100 % anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtiene un capital 2C. Si los intereses se pagan semestralmente, el capital se transforma en: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C = 2.25\ C$. *Si los intereses se pagan trimestralmente, se obtiene* $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdot C = 2.44\ C$. *En caso de pagos mensuales, el capital que se obtiene es* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \cdot C =$ 2.61 C y si *los pagos son diarios se consigue:* $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cdot C = 2.71\ C$.

Al aumentar la cantidad de períodos de pago el factor que multiplica al capital *C* se aproxima al número *e* = 2.7182818284...

Y el **número áureo**, FI (Φ), utilizado por artistas de todas las épocas por arquitectos, pintores y escultores (el griego Fidias, el italiano Leonardo da Vinci, y muchos más) en las proporciones de sus obras.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749...$$



Autor: Marea Verde. 4º de ESO. Página 17

¿Cómo se ha llegado a este número?

Hacemos una representación gráfica mediante un eje de coordenadas y tomamos como unidad el número 1 en ambos ejes. Al punto donde se encuentran, le llamamos A.

Desde el punto A tiramos una línea que vaya a parar al punto medio del eje horizontal, al que llamamos M.

Si te fijas bien, verás que la figura acotada por los puntos M, 1 y A es un triángulo rectángulo, en el que la línea MA es la hipotenusa, M1 es el cateto adyacente y A1 es el cateto opuesto. ¿Y qué teorema nos relaciona la hipotenusa y sus catetos?

Pues exactamente el teorema de Pitágoras que reza que "Hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

$h^2 = a^2 + b^2$ de lo que deducimos que h = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Y ahora vamos a resolverlo: Tenemos que A1 vale 1 y M1, al ser el punto medio entre el origen 0 y la unidad 1, vale la mitad, o sea, 1/2. Vamos a substituir:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Autor: Marea Verde. 4º de ESO. Página 17

Para los que nos perdemos con las operaciones, en la resolución de MA, al paso tercero llegamos porque debes recordar que cuando sumamos un quebrado con el numero 1 podemos representar

ese 1 como un quebrado nuevo, tomando el denominador del quebrado, en este caso 1/4 entre sí mismo.

En cristiano, ese 1 lo podemos representar como 4/4, y hacemos una suma de fracciones de igual denominador, que es muy sencilla, ya que sólo tenemos que conservar el denominador y hacer la suma de numeradores, en este caso 1 + 4 =5, por lo que obtenemos el 5/4.

Al paso 4 llegamos descomponiendo el factor común $\sqrt{\frac{5}{4}}$ en dos partes, es decir, una división de dos raíces individuales que son $\sqrt{5}$ en el numerador y $\sqrt{4}$ en el denominador.

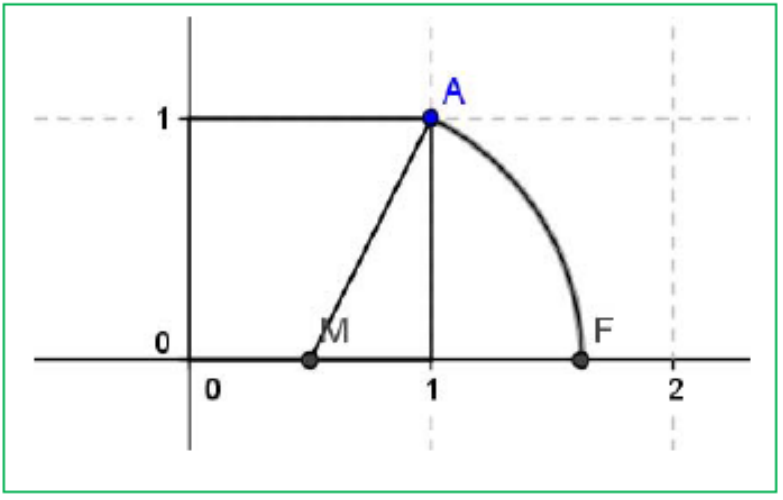
La raíz de 5 no la podemos resolver, pero la raíz cuadrada de 4, sí la podemos resolver ya que es 2. Y por eso nos da el resultado de

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Finalmente, al sumar OF y MA, siendo como es una suma de fracciones de igual denominador, hacemos

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como colofón y fin de fiesta, cogemos un compás, ponemos su aguja en el punto M, hacemos coincidir su otro extremo, el que tiene la punta de lápiz, en el punto A y trazamos una curva hasta que alcance al eje horizontal. Y el punto en que se encuentran el punto A y el eje horizontal se llama F.



1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

1.1. MAGNITUD

1.2. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

2. EL METRO

2.1. UNIDADES DE LONGITUD
2.2. CAMBIO DE UNIDADES
2.3. UNIDADES DE SUPERFICIE
2.4. CAMBIO DE UNIDADES
2.5. UNIDADES AGRARIAS
2.6. UNIDADES DE VOLUMEN
2.7. CAMBIO DE UNIDADES

3. EL LITRO. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

3.1. EL LITRO
3.2. CAMBIO DE UNIDADES
3.3. RELACIÓN ENTRE LITROS Y m^3

4. UNIDADES DE MASA

4.1. EL KILOGRAMO
4.2. CAMBIO DE UNIDADES

5. MEDIDA DEL TIEMPO

6. OTRAS UNIDADES DE MEDIDA

6.1. UNIDADES MONETARIAS

Resumen

Un accidente inter-espacial, la búsqueda infructuosa de un tesoro sumergido... todo debido a la confusión entre las unidades de medida. Es importante saber si estamos usando nuestro Sistema Internacional de Unidades (SI), o si se emplean unidades anglosajonas. En este capítulo aprenderás a utilizar las unidades de medida del Sistema Internacional de Unidades (SI), (antiguamente Sistema Métrico Decimal), a hacer cambios entre unas unidades y otras, e incluso a utilizar otras medidas, de divisas, etc.

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

1.1. Magnitud

Una **magnitud** es una característica de un cuerpo, sustancia o fenómeno físico que se puede medir y expresar cuantitativamente, es decir, mediante un número.

Una magnitud se mide comparándola con un patrón que tenga bien definida esa magnitud y observando el número de veces que lo contiene. A ese patrón le llamamos **unidad de medida**.

Una misma magnitud se puede expresar con distintas unidades de medida.

Ejemplo:

- La longitud es una magnitud y se puede expresar en kilómetros, metros, centímetros, millas, pulgadas,... Puedo decir que alguien mide 1,52 metros, 152 centímetros, 4,98 pies, 59,76 pulgadas,... la altura es la misma, pero está expresada en distintas unidades.

Observa que no se puede decir que *alguien mide 1 altura, 2 alturas*,... pues la altura es la magnitud, no la unidad, que podría ser el centímetro. Igual no se dice que *alguien pesa 1 masa, 2 masas*,... ya que masa es la magnitud, que se mide en kilogramos.

MEDIDAS INGLESAS				
Denominación en Inglés	Denominación en Castellano	equivalencia entre medidas inglesas	equivalencia Sistema Métrico Decimal	Tipo de medida
Inch	Pulgada	-	2,54 centímetros	Longitud
Foot	Pie	1 pie=12 pulgadas	30,48 centimetros	Longitud
Yard	Yarda	1 yarda=3 pies	91,44 centimetros	Longitud
Farhom	Braza	1 braza =2 yardas	1.829 metros	Longitud
Forlong	Estadio	1 Estadio = 220 yardas	201,16 metros	Longitud
Statute Mile	Milla terrestre	1 Milla terrestre = 8 estadios	1.609 metros	Longitud
Nautical Mile	Milla marítima	1 Milla Náutica = 6.080 pies	1.853 metros	Longitud
Ounce	Onza	0	28,35 gramos	Peso
Pound	Libra	16 onzas	454 gramos / 1 kilogramo = 2,2 libras	Peso
Quarter	Arroba Inglesa	28 libras	12,70 kilogramos	Peso
Gallon	Galón	-	4,54 litros	Capacidad

1.2. Sistema Internacional de Unidades (SI)

Para poder **comparar** el valor de varias magnitudes debemos utilizar una misma unidad de medida.

Ejemplo:

- Si quiero comparar las medidas de una mesa que uso en clase con una mesa de mi casa, debo utilizar la misma unidad. Si una la mido en centímetros y la otra en pulgadas, no puedo compararlas.

Para facilitar el intercambio científico, cultural y comercial, en casi todos los países se ha adoptado el **Sistema Internacional de Unidades** (SI) como sistema de medidas.

Es el heredero del antiguo **Sistema Métrico Decimal** y por ello también se le conoce como **Sistema Métrico** o simplemente como **Sistema Internacional** (SI).

Algunas de las unidades básicas que utiliza para las distintas magnitudes son:

Longitud	Superficie	Volumen	Masa	Tiempo
El metro	El metro cuadrado	El metro cúbico	El kilogramo	El segundo

El segundo, que es una medida fundamental del Sistema Internacional de Unidades, como bien sabes, no es decimal, 100 segundos no son una hora ni un minuto. Sin embargo en el resto de los casos, para pasar de una unidad a otra que sea múltiplo o submúltiplo, hay que multiplicar por una potencia de diez. Por ello, en ocasiones, se habla del Sistema Métrico *Decimal*.

En general, los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal se nombran añadiendo prefijos (kilo, centi,...). Lo estudiaremos con más detenimiento más adelante.

Existen unidades, como por ejemplo los pies, que usan en múltiplos y submúltiplos un sistema decimal, pero no forman parte del Sistema Internacional de Unidades. Mientras que otras, como el segundo, que si forman parte del Sistema Internacional de Unidades no usan un sistema decimal.

Nota curiosa:

Según la Física Clásica las magnitudes fundamentales de masa, tiempo y longitud son propiedades de los objetos, pero según la Teoría de la Relatividad ya NO son propiedades "reales" de los objetos. Al observar un objeto desde fuera, cuanta más velocidad lleve ese objeto más se achata la longitud, más se acelera el tiempo y más aumenta la masa del objeto. El tiempo es relativo, así como la longitud o la masa.

Las magnitudes fundamentales que usaremos son tres: masa (kg), tiempo (s) y longitud (m). Otras son magnitudes derivadas, como de superficie (metro cuadrado), de volumen (metro cúbico) o por ejemplo, la velocidad que se puede medir en kilómetros por hora (km/h).

2. EL METRO

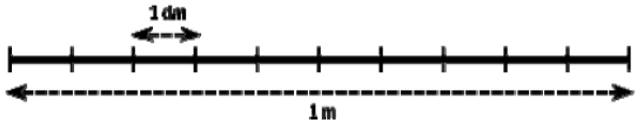
2.1. Unidades de longitud

El **metro** es una unidad de medida de longitud y se representa por **m**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1.000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m



Un metro está dividido en 10 decímetros

Existen otros múltiplos y submúltiplos:

Micrómetro (µm). 1 µm = 0,001 mm = 0,000.001 m
Nanómetro o micra (nm). 1 nm = 0,001 µm = 0,000.000.001 m
Ångström (**Å**). 1 Å = 0,1 nm = 0,000.000.000.1 m

Otras unidades de longitud, que no son múltiplos o submúltiplos del metro son:
Unidad astronómica (UA): Es la distancia media entre la Tierra y el Sol, y es igual a 150 millones de km.

Año luz: Es la distancia recorrida por un rayo de luz en un año:

1 año luz = 63.240 UA = 9.460.000.000.000 km

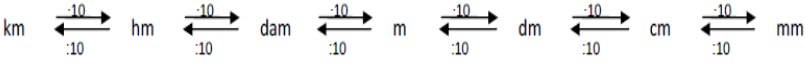
Ejemplos:

- La Vía Láctea tiene de radio 50.000 años luz.
- El diámetro de un cabello es de aproximadamente 0,1 mm
- Un espermatozoide mide 53 µm, un hematíe 7 µm.
- Los chips electrónicos están compuestos de transistores de 22 nm de tamaño.
- El átomo más pequeño, el de hidrógeno, tiene aproximadamente 1 Å de diámetro.

9.460.000.000.000 es 9 Billones 460 mil millones de kilómetros.

2.2. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de longitud debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.



Se hace desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Actividades resueltas

- Expresa en metros:

a) 7,23 km = 72,3 hm = 723 dam = 7.230 m 7,23 km = [3 posiciones]=7.230 m

b) 312 mm = 31,2 cm = 3,12 dm = 0,312 m 312 mm = [3 posiciones]=0,312 m

c) 1,32 hm = 132 m

d) 27 cm = 0,27 m

e) 0,021 km = 21 m

f) 11 km 3 hm 7 m = 11.307 m

g) 4 dam 6 m 8 dm 5 mm = 46,805 m

RAMO

2.3. Unidades de superficie

El **metro cuadrado** es la unidad de medida de superficie y se representa por m^2.

Es una unidad derivada del metro. **No** es una unidad fundamental.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

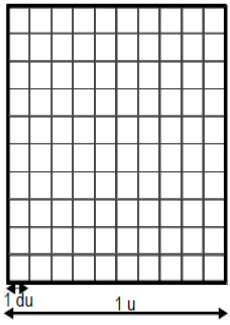
Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cuadrado	**Hect**ómetro cuadrado	**Dec**ámetro cuadrado	**Metro cuadrado**	**Dec**ímetro cuadrado	**Cent**ímetro cuadrado	**Mil**ímetro cuadrado
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000 1 m^2	0,000 001 m^2

- Comprobemos que en 1 m^2 hay 100 dm^2:

Un metro cuadrado es la superficie que tiene un cuadrado de 1 m de lado.

Dividimos cada uno de sus lados en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Unimos los extremos de los segmentos formando cuadrados. Obtenemos 100 cuadrados de 1 dm de lado. Es decir, en el metro cuadrado hay 100 de estos cuadrados, es decir, 100 dm^2.

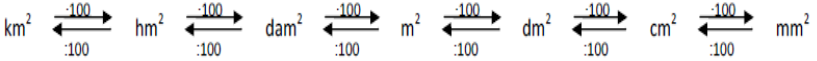


Ejemplos:

- Un piso suele medir entre 65 m^2 y 100 m^2.
- Un campo de fútbol para partidos internacionales mide entre 64 dam^2 y 82,5 dam^2.
- La ciudad de Valladolid tiene una superficie de 197,91 km^2 y la de Madrid 605,8 km^2.
- La provincia del estado español con mayor superficie es Badajoz, con 21 766 km^2, y la menor, Guipúzcoa con 1 980 km^2.
- La provincia de Madrid tiene 8 027 km^2 de superficie. Imagina un rectángulo de 100 km de ancho y 80 km de largo.
- El estado de la Unión Europea con mayor superficie es Francia, con 547 030 km^2.

2.4. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **superficie** debemos multiplicar o dividir por **cien** tantas veces como sea necesario.



Se hace desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de dos en dos cifras.

Actividades resueltas

Expresa en metros cuadrados:

a) $0{,}843\ km^2 = 84{,}3\ hm^2 = 8.430\ dam^2 = 843.000\ m^2$ $0{,}843\ km^2$= [6 posiciones a la derecha]= $843.000\ m^2$

b) $35.400\ mm^2 = 354\ cm^2 = 3{,}54\ dm^2 = 0{,}0354\ m^2$ $35.400\ mm^2$ = [6 posiciones a la izquierda]= $0{,}0354\ m^2$

c) $8{,}32\ hm^2 = 83.200\ m^2$

d) $27\ cm^2 = 0{,}0027\ m^2$

e) $74\ km^2 = 74.000.000\ m^2$

f) $7\ km^2\ 63\ hm^2\ 7\ m^2 = 7.630.007\ m^2$

g) $4\ dam^2\ 5\ m^2\ 23\ dm^2 = 405{,}23\ m^2$

RAMO

2.5. Unidades agrarias

Son unidades que **no** pertenecen al Sistema Internacional pero se utilizan para medir superficies rurales, bosques, plantaciones,...

La **hectárea**	1 **ha** = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2
El **área**	1 **a** = 100 m^2 = 1 dam^2
La **centiárea**	1 **ca** = 0,01 a = 1 m^2

Es decir, para hacer la conversión entre unidades agrarias y su conversión con el Sistema Internacional podemos utilizar la siguiente regla:

$$hm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} m^2$$
$$ha \qquad\qquad a \qquad\qquad ca$$

Ejemplos:

- Una hectárea es un cuadrado de 100 m de lado. Un campo de fútbol mide 62 áreas, aproximadamente media hectárea. Para hacernos una imagen mental, podemos pensar que dos campos de fútbol son más o menos una hectárea.
- La superficie incendiada en España cada año es, en promedio, unas 125 000 ha. La provincia más pequeña es Guipúzcoa, con 1 980 km^2, es decir, 198 000 ha. Por tanto el área incendiada cada año es aproximadamente el de esa provincia.

Actividades resueltas

- Expresa en hectáreas:

a) 5,7 km^2 = 570 hm^2 = 570 ha

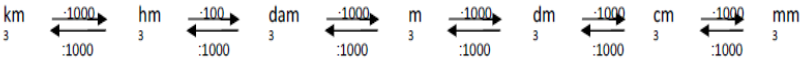
b) 340.000 ca = 34 ha

c) 200.000 dm^2 = 0,2 hm^2 = 0,2 ha

d) 930 dam^2 = 9,3 hm^2 = 9,3 ha

2.7. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **volumen** debemos multiplicar o dividir por **mil** tantas veces como sea necesario.



Se hace desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de tres en tres cifras.

Actividades resueltas

Expresa en metros cúbicos:

a) 0,843 km^3 = 843 hm^3 = 843.000 dam^3 = 843.000.000 m^3

0,843 km^3= [9 posiciones a la derecha]= 843.000.000 m^3

b) 35.400 mm^3 = 35,4 cm^3 = 0,0354 dm^3 = 0,0000354 m^3

35.400 mm^3 = [9 posiciones a la izquierda]= 0,0000354 m^3

c) 8,32 hm^3 = 8.320.000 m^3

d) 27 cm^3 = 0,000027 m^3

e) 74 km^3 = 74.000.000.000 m^3

f) 7 km^3 63 hm^3 7 m^3 = 7.063.000.007 m^3

g) 4 dam^3 5 m^3 23 dm^3 = 4.005,023 m^3

3. EL LITRO. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

El **volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y **capacidad** es lo que cabe dentro de un recipiente. En general se llama capacidad de un recipiente a su volumen. Capacidad y volumen se miden con el metro cúbico y sus derivados. El *litro* se utiliza por razones históricas y no pertenece al Sistema Internacional de Unidades. Aunque nos conviene conocerlo si lo consideramos como una unidad de volumen "coloquial" utilizada normalmente para medir la capacidad de los recipientes. Un **litro (L)** es la capacidad de una caja cúbica de 1 dm de lado, por tanto, corresponde a un dm^3. Se utilizan múltiplos de litro como si fuera una unidad más del SI, con múltiplos y divisores decimales.

3.1. El litro

Su unidad de medida es el **litro** y se representa por **L**.

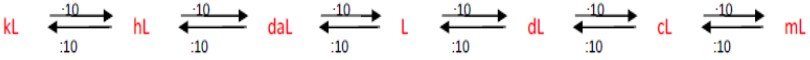
Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilolitro	Hectólitro	Decalitro	Litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
1000 L	100 L	10 L	1 L	0,1 L	0,01 L	0,001 L

Ejemplos:

- Una botella de agua grande tiene una capacidad de 1,5 L.
- Un depósito de gasóleo para una casa puede tener una capacidad de 4 hL.
- Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cL.
- Una dosis típica de jarabe suele ser de 5 mL.
- En una ducha de cinco minutos se utilizan unos 90 L de agua.
- Cuando medimos capacidades de agua grandes se utilizan unidades de volumen (m^3, hm^3, ...).

3.2. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de capacidad debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario. Igual que con metros, pues la unidad no está elevada ni al cuadrado ni al cubo.



Se hace desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplo:

- Expresa en litros:
  - a) 4,2 hL = 420 L
  - b) 300 mL = 0,3 L
  - c) 7,2 kL = 7.200 L
  - d) 0,023 5 kL = 23,5 L
  - e) 420 cL = 4,2 L
  - f) 1,2 mL = 0,001 2 L

3.3. Relación entre litros y m^3

Los litros se relacionan con las unidades de volumen porque:

1 L equivale a 1 dm^3.

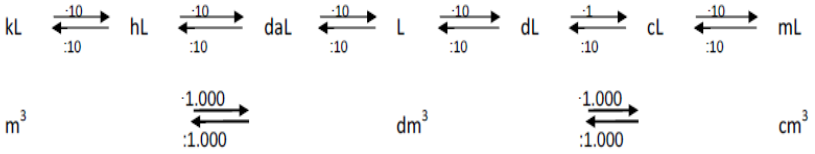
Por lo tanto:

1 L = 1 dm^3

1 mL = 1 cm^3

1 kL = 1 m^3

Si lo añadimos al esquema de cambios de unidades de capacidad:



Ejemplos:

- Un depósito de agua de 1 m^3 tiene 1 kL de capacidad, es decir, mil litros, 1 000 L.
- En los botellines de agua, dependiendo de la marca, se expresa la cantidad de agua como capacidad o como volumen en mL, cm^3, cL o L. Por ejemplo: 50 cL, 1/3 L, 500 mL, 33 cL, 250 mL.
- Un litro de leche ocupa un volumen de 1 dm^3.

Actividades resueltas

- Expresa en litros:

  a) 4,2 dm^3 = 4,2 L b) 12 m^3 = 12 kL =12.000 L c) 30 cm^3 = 30 mL = 0,03 L

- Expresa en decímetros cúbicos:

  d) 0,835 hL = 83,5 dm^3 = 83,5 dm^3 e) 43 cL = 0,43 L = 0,43 dm^3

  f) 23,5 kL = 23.500 L = 23.500 dm^3 g) 0,6 dL = 0,06 L = 0,06 dm^3

4. UNIDADES DE MASA

4.1. El kilogramo

El **kilogramo** es la unidad de medida de masa y se representa por **kg**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (**SI**).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Unidad	Submúltiplos					
Kilogramo	Hectogramo	Decagramo	Gramo	Decigramo	Centigramo	Miligramo
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g

Múltiplos			Unidad
Tonelada métrica	Quintal métrico	Miriagramo	Kilogramo
tm	qm	mag	kg
1000 kg	100 kg	10 kg	1 kg

La **tonelada** y el **quintal** no son múltiplos del gramo ni pertenecen al SI. En origen una tonelada eran 960 kg y corresponde a 20 quintales de 46 kg o 100 libras, pero cuando se impuso el SI continuaron usándose, aunque "redondeados" a 1000 kg y 100 kg. Estas nuevas unidades son la **tonelada métrica** (tm) y el **quintal métrico** (qm), que sí pertenecen al Sistema Universal de Unidades.

Nota:

¡La masa no es lo mismo que el peso!

Una bola de acero peso mucho en la Tierra, pero no pesa nada en el espacio, y aún así, si te la tiran con fuerza te sigue dando un buen golpe. La fuerza de ese golpe te dice que tiene mucha masa (gramos). La masa se conserva en el espacio porque es una verdadera magnitud, pero el peso es una fuerza debida a la gravedad de la Tierra. Solo en la Tierra la masa y el peso de una persona coinciden como cantidad, por eso es normal decir que alguien "*pesa tantos kg*" aunque no sea del todo correcto, se debería decir que "tiene una masa de 70 kg y, en la Tierra, pesa 70 kgf (kilo gramos fuerza)".

En los ejemplos siguientes usaremos kg como peso por seguir con la forma *coloquial* de hablar, pero deberíamos usar kgf o decir que "tiene una masa de 70 kg".

Cuando pedimos en la tienda *un kilo de patatas,* estrictamente, desde el punto de vista matemático, estamos diciendo *mil patatas*, puesto que el prefijo *kilo* significa *mil*.

No significa que esté mal decirlo, debemos distinguir distintos contextos y situaciones.

En la tienda podemos comprar *un kilo de patatas*, mientras que en clase de matemáticas diremos un *kilogramo-fuerza de patatas*.

Ejemplos:

- Una persona adulta puede pesar 70 kg (bueno, deberíamos decir "tiene una masa de 70 kg" como ya comentamos antes).
- En un bocadillo se suelen poner unos 40 g de embutido.
- La dosis que hay en cada pastilla de *enalapril* (medicamento contra la hipertensión arterial) es de 10 mg. El resto de la pastilla es excipiente (relleno para que sea manejable).
- Para plantar trigo, se utilizan entre 60 kg y 250 kg de semilla por hectárea y se cosechan varias toneladas por hectárea.
- El peso de un coche vacío es de unos 1.200 kg.
- El peso máximo autorizado de un vehículo con dos ejes es de 18 t.
- Un elefante africano puede pesar hasta 7,5 t. Una ballena azul, 120 t.

La primera *definición* de **kilogramo** se decidió durante la Revolución Francesa y especificaba que era la masa de un dm^3 (un litro) de agua destilada al nivel del mar y 3,98 ºC.

Hoy se define como la masa que tiene el prototipo internacional, compuesto de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Actividad resuelta

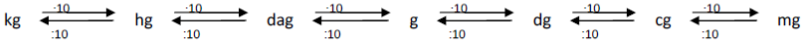
- ¿Pesa más un kilogramo de hierro que uno de paja?

La masa es igual, pero ambas están en la Tierra rodeadas de aire, e igual que ocurre si están rodeadas de agua, el hierro irá hacia abajo con más fuerza que la paja que "flota más" tanto en el agua como en el aire. Piénsalo así: ¿Que pesa más, un trozo de hierro de 100 kg o un globo aerostático de 100 kg que está flotando? Si el globo vuela, ¿es que no pesa?

Volvemos a la misma idea de antes. No debemos confundir el peso (que es una fuerza) con la masa.

4.2. Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de masa debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.



Se hace desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Un **litro** de agua tiene de masa, casi de forma exacta **1 kg**.

Actividades resueltas

- Expresa en gramos:

  a) 0,23 kg = 230 g b) 312 mg = 0,312 g c) 5,32 hg = 532 g

  d) 2,57 cg = 0,0257 g e) 0,021 kg = 21 g f) 11 kg 3 hg 7 g = 11.307 g

  g) 4 dag 6 g 8 dg 5 mg = 46,805 g

- Expresa en kilogramos:

  h) 3,2 tm = 3 200 kg i) 740 g = 0,74 kg j) 5,4 qm = 540 kg

  k) 42 mag = 420 kg l) 238 hg = 23,8 kg m) 1200 dag = 12 kg

- Supongamos que hemos comprado 1 kg de alubias, 2,5 kg de fruta, 2 botellas de litro de agua y dos botellas de 1,5 L de agua.

  $$1\ kg + 2{,}5\ kg + 2\ kg + 2 \cdot 1{,}5\ kg = 8{,}5\ kg$$

  Nuestra compra tiene una masa de aproximadamente 8,5 kg.

UNA MEDIDA HISTÓRICA EN ESPAÑA: LA ARROBA.

Como medida de peso, la arroba equivalía a la cuarta parte del quintal, lo que supone 25 libras castellanas (aproximadamente 11,502 kg).

En España tiene diversas equivalencias en el sistema métrico decimal con otras unidades de masa, dependiendo de la zona geográfica. En Castilla equivalía a 11,5002325 kilogramos, en Aragón a 12,126 kilogramos, en Navarra el *"robo"* supone 28,13 litros, en Cataluña a 26 libras catalanas[12], que equivalían a 10,4 kg, en Almería es cercana a 14Kg y en el País Valencià a 36 libras valencianas[13] o 12,78 kg.

Aunque en España la arroba, como unidad de medida, está en desuso desde que la Ley de 19 de julio de 1849 declaró obligatorio el uso del sistema métrico decimal en todas las transacciones comerciales, sigue siendo utilizada como medida tradicional entre los agricultores, y así, por ejemplo, en el País Valencià se usa para medir la masa de cítricos en las transacciones entre los agricultores e intermediarios, asignándole un valor de 12,78 kilogramos.

En otros lugares de España se usa para medir la masa de los cochinos, con un valor de 11,5 kg. También es de uso común en algunas zonas vitivinícolas, como en la zona de Montilla-Moriles, y equivale a 16 litros. La capacidad de barriles y toneles no se expresa en litros, sino en arrobas.

RAMON FERRI I MARÍ

[12] 1 libra catalana equivale a 400 gramos o 0,4 kgs.
[13] 1 libra valenciana equivale a 355 gramos o 0,355 kgs.

En la noble tierra Aragonesa, Cuna de la Corona de Aragón, tienen una riqueza idiomática propia. A veces cuesta entenderles, pero eso no quita un ápice de su valía.

Os dejo este divertidísimo resumen de la forma que tienen de entender las medidas de capacidad en sus bares, cantinas y tascas, obra del genial J.A. BERNAL

Autor: @j_a_bernal

5. MEDIDA DEL TIEMPO

¿Qué es un **día**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje.

¿Y un **año**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol.

Para conocer su duración hay que estudiar el movimiento del Sol. Los primeros pueblos que se ocuparon de la Astronomía fueron los babilonios y asirios.

Ellos usaban un sistema de numeración que no era decimal, sino sexagesimal. De ellos aún nos quedan las siguientes medidas del tiempo:

Un **día** tiene 24 horas.

Una **hora** tiene 60 minutos.

Un **minuto** tiene 60 segundos.

La unidad utilizada para medir la magnitud "tiempo" es el **segundo**, que se representa por la letra s, en minúscula y sin punto. Es una unidad del Sistema Internacional de Unidades (SI) pero ***no*** *es decimal*, es *sexagesimal*.

Pasar segundos a horas y minutos, o viceversa se hace de la misma forma a como se pasan en las medidas de ángulos de segundos a grados y minutos que aprenderás en el capítulo 8 de "Figuras Planas" en el apartado 1.4.

Otras medidas del tiempo que conoces son:

La **semana** que tiene 7 días.

El **mes**, que tiene 30 días, o 31 días o 28 días el mes de febrero, salvo los años bisiestos que tiene 29.

Un **año** que tiene 12 meses.

Un año tiene 365 días excepto los años bisiestos que tienen 366 días.

La cronología permite datar los acontecimientos representándolos en una línea de tiempo.

Para medir el tiempo, en un principio, se empezó midiendo los movimientos de los astros, el movimiento aparente del Sol y de la Luna. Luego se utilizaron relojes como el reloj de sol, de arena o la clepsidra o reloj de agua. Ahora existen relojes y cronómetros muy perfeccionados.

Nuestro año comienza el 1 de enero, pero otros países utilizan otros calendarios, como el chino, el judío, o el musulmán. Al escribir esto estábamos en el año 2013, pero otros pueblos están en otros años muy diferentes. Infórmate sobre ese particular.

Calendario gregoriano	viernes, 22 de marzo de 2024 d. C.
Calendario islámico	alyumuá, 12 ramadán 1445 AH الجمعة, ١٢ رمضان ١٤٤٥ هـ
Calendario persa (iraní)	yomé, 3 farvardín 1403 SH جمعه، ۳ فروردین ۱۴۰۳

Calendario gregoriano	viernes, 22 de marzo de 2024 d. C.
Calendario hebreo	yom shishí, 12 de 10 de 5784 AM יום שישי י"ב באדר ב' ה'תשפ"ד לבריאת העולם

Magnitud	Una **magnitud** se puede medir en distintas **unidades de medida**.
La distancia (magnitud) se puede medir en metros, centímetros, kilómetros,... (distintas unidades de medida)	
Longitud: metro	km ·10 :10 hm ·10 :10 dam ·10 :10 m ·10 :10 dm ·10 :10 cm ·10 :10 mm
0,32 km = 320 m = 32 000 cm	3 400 mm = 34 dm = 0,34 dam
Superficie: metro cuadrado	km^2 ·100 :100 hm^2 ·100 :100 dam^2 ·100 :100 m^2 ·100 :100 dm^2 ·100 :100 cm^2 ·100 :100 mm^2
$0{,}0014\ km^2 = 0{,}14\ hm^2 = 14\ dam^2$	$23.000\ mm^2 = 230\ cm^2 = 2{,}3\ dm^2$
Unidades agrarias	1 ha = 1 hm^2 1 a = 1 dam^2 1 ca = 1 m^2
$5\ km^2 = 500\ hm^2 = 500$ ha	$13.000\ m^2 = 13.000$ ca= 1,3 ha
Volumen: metro cúbico	km^3 ·1000 :1000 hm^3 ·1000 :1000 dam^3 ·1000 :1000 m^3 ·1000 :1000 dm^3 ·1000 :1000 cm^3 ·1000 :1000 m
$3{,}2\ hm^3 = 3.200\ dam^3 = 3.200.000\ m^3$	$2.800\ mm^3 = 2{,}8\ cm^3 = 0{,}0028\ dm^3$
El litro	kL ·10 :10 hL ·10 :10 daL ·10 :10 L ·10 :10 dL ·10 :10 cL ·10 :10 mL
3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L	85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L
Litros y m^3	1 kL = 1 m^3 1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3
$4{,}5\ cL = 45\ mL = 45\ cm^3$	$3\ hL = 0{,}3\ kL = 0{,}3\ m^3$ $3\ hL = 300\ L = 300\ dm^3$
Masa: kilogramo	kg ·10 :10 hg ·10 :10 dag ·10 :10 g ·10 :10 dg ·10 :10 cg ·10 :10 mg
2300 kg = 2,3 t	0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg 5,3 hg = 53.000 cg
Unidades monetarias	1 € = 0,86 £ = 9 Bs = ... (varía constantemente)
$200\ € = 200\ € \frac{0{,}86\ £}{1\ €} = \frac{200 \cdot 0{,}86}{1} \frac{€ \cdot £}{€} = 172\ £$	1.800 Bs=200€

Tirando millas

La **milla náutica** (1 852 metros) es distinta de la **milla terrestre** (1 609 metros), porque la *velocidad* en los barcos se mide en "**nudos**". Para medir la velocidad se tiraba una cuerda especial con muchos nudos por detrás del barco, y se miraba cuántos se quedaban flotando: el número de nudos que flotan indica la velocidad. Una milla náutica se definió como la distancia que navega un barco a una velocidad de un nudo durante una hora, por eso no coincide con la milla terrestre.

NOCIONES BÀSICAS DE GEOMETRÍA DEL PLANO.

GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y TRIGONOMETRÍA.

La geometría euclídea es la parte de la geometría que estudia los objetos o figuras y sus relaciones en un espacio donde se cumplen los cinco postulados de Euclides y las cinco nociones comunes. Estos postulados y nociones comunes fueron recogidas en un tratado de geometría escrito por Euclides de Alejandría, hacia el año 300 antes de Cristo, que constaba de trece libros y que se decía los Elementos.

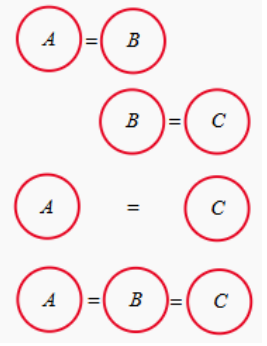
Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Si una recta corta a otras dos formando, a un mismo lado de la secante, dos ángulos internos agudos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están dichos ángulos

RAMON FERRER I MARÍ

Las cinco nociones comunes son:

1. Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre sí.(la propiedad transitiva de una relación euclidiana).



2. Si a cosas iguales añadimos cosas iguales, las totales son iguales.(La propiedad de la suma de la igualdad).

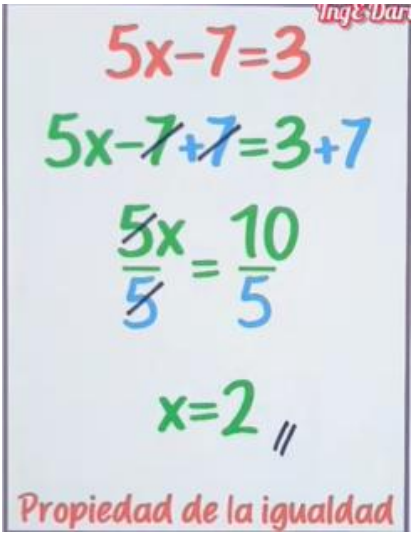
Para todo número a, b, c:

Si a = b, entonces, a + **c** = b + **c**

Esta propiedad asegura que en una igualdad al sumar una misma cantidad en ambos lados, se obtiene el mismo resultado.

Piensa que el método de la igualdad en la resolución de las ecuaciones se basa en esta noción Euclideana. Como ves, en matemáticas todas las partes están ligadas y conectadas entre ellas.

RAFAEL CERRER I MARÍ



3. Si a cosas iguales quitamos cosas iguales, los restos son iguales.(Propiedad de igualdad de la resta).

Dice que en una igualdad se pueden suprimir dos elementos iguales en ambos miembros y la igualdad no se altera.

*Ejemplos:

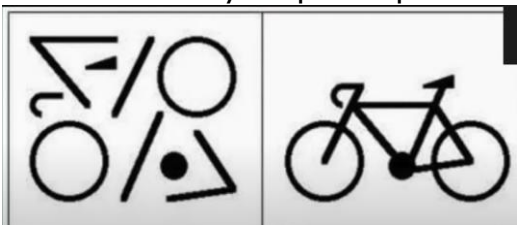
*Si (2 x 6) - 4 = 12 - 4, entonces 2 x 6 = 12

*Si a + b = c + b, entonces a = c

*Si (8 / 4) (5) = (2) (5), entonces 8 /4 = 2

4. Las cosas que se superponen son iguales.(propiedad reflexiva) → Para cada número real x , tenemos que x = x, o sea que ese número real es igual a sí mismo.

5. El todo es mayor que la parte.



La bicicleta entera es mayor que cada una de las 9 partes que la componen.

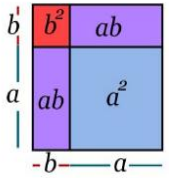
3.3. Igualdades notables

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en algún caso particular, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

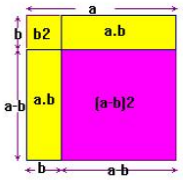
El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.



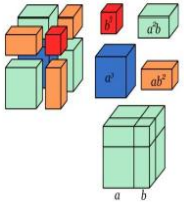
Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.



Observa la figura y conéctala con la igualdad.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

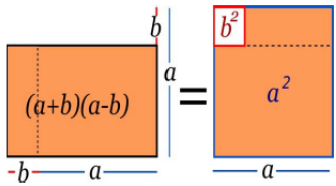
- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7) = a^2 - 7^2 = a^2 - 49$
- $(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x) =$
  - $= (-1)\cdot(5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

IGUALDADES NOTABLES

$$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Las igualdades notables son importantes porque van a aparecer, de una manera u otra, el resto de la vida que demos matemáticas.

Olvidarse de ellas supone cometer errores garrafales, que mandan a hacer puñetas los ejercicios.

Así que haz un esfuerzo de memorización o mejor aún recuerda las demostraciones gráficas de los cuadrados.

Aquí os dejo una interesantísima tabla para que veáis diferentes combinaciones de estas identidades notables:

Juegos y matemáticas - WordPress.com

$(x+1)^2$	x^2+2x+1	$(x+1)(x-1)$	x^2-1
$(x+2)^2$	x^2+4x+4	$(x+2)(x-2)$	x^2-4
$(x+3)^2$	x^2+6x+9	$(x+3)(x-3)$	x^2-9
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x+4)(x-4)$	x^2-16
$(x+5)^2$	$x^2+10x+25$	$(x+5)(x-5)$	x^2-25
$(x+6)^2$	$x^2+12x+36$	$(x+6)(x-6)$	x^2-36
$(x-1)^2$	x^2-2x+1	$-(x-2)^2$	$-x^2+4x-4$
$(x-2)^2$	x^2-4x+4	$-(x-3)^2$	$-x^2+6x-9$
$(x-3)^2$	x^2-6x+9	$-(x+1)(x-1)$	$-x^2+1$
$(x-4)^2$	$x^2-8x+16$	$-(x+2)(x-2)$	$-x^2+4$
$(x-5)^2$	$x^2-10x+25$	$-(x+3)(x-3)$	$-x^2+9$
$(x-6)^2$	$x^2-12x+36$	*Inicio*	*Final*

Y ahora, sigamos con la Trigonometría

La Trigonometría[14] es la parte de las matemáticas que se encarga de estudiar y medir los triángulos, las relaciones entre sus ángulos y lados, y sus funciones trigonométricas deseno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

La aplicación de las funciones trigonométricas en la física, astronomía, telecomunicaciones, náutica, ingeniería, cartografía, entre otros ámbitos, es lo que las dota de relevancia, pues permiten calcular distancias con precisión sin tener que, necesariamente, recorrerlas.

Sabiendo esto, la importancia de la trigonometría radica en las diversas aplicaciones que tiene para, por ejemplo:

- Calcular la distancia entre dos puntos, de los cuales uno, o incluso ambos, son inaccesibles.
- Calcular de forma precisa distancias y ángulos de inclinación, siendo de gran utilidad para la ingeniería civil.
- Calcular la altura de un punto en pie que puede ser, también, inaccesible.

RAMON FERRER I MARI

Se entiende por funciones trigonométricas a la relación métrica entre los lados de un triángulo rectángulo. A partir de un triángulo que presente

[14] https://www.ferrovial.com/es/stem/trigonometria/

un ángulo recto de 90 grados se pueden determinar tres elementos fundamentales:

- Ángulos: área del plano que se encuentra entre dos semirrectas con origen común. Se trata de la amplitud del arco de una circunferencia, centrada en el vértice y delimitada por sus lados.
- Catetos: resto de lados que conforman un triángulo. Se pueden clasificar en cateto opuesto (que se encuentra del lado opuesto o en frente del ángulo estudiado) y el adyacente (que se encuentra junto al ángulo analizado).
- Hipotenusa: lado de mayor longitud de un triángulo y está opuesto al ángulo recto.

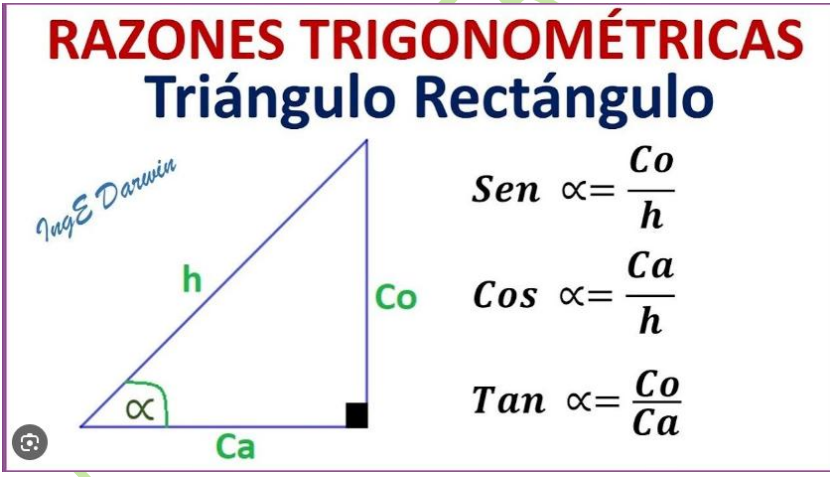
Entendidos estos tres conceptos fundamentales, las funciones trigonométricas son:

- Seno: razón que existe entre el cateto opuesto del ángulo de estudio y la hipotenusa.
- Coseno: división del cateto adyacente del ángulo analizado entre la hipotenusa del triángulo.
- Tangente: razón que existe entre el l opuesto y el cateto adyacente del triángulo. Se expresa como la división del seno entre el coseno.

RAMON FERRER I MARI

Cada función trigonométrica tiene su razón recíproca, es decir:

- Secante: razón recíproca del coseno que consiste en la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente.
- Cosecante: razón recíproca del seno que consiste en la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto.
- Cotangente: razón recíproca de la tangente que consiste en la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto.



Fuente YouTube. IngEDarwin.

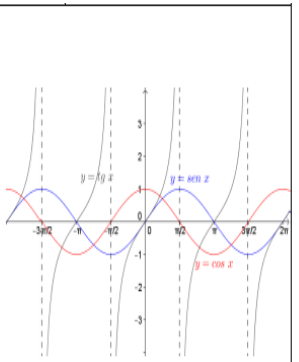
Cosecante: Es la inversa del seno, en este caso $\frac{h}{Co}$

Secante: Es la inversa del coseno, en este caso $\frac{h}{Ca}$

Cotangente: Es la inversa de la tangente, en este caso $\frac{Ca}{Co}$

Peligro: Por las similitudes entre Seno y Secante, y entre Coseno y Cosecante, existe la posibilidad de liarse con esos nombres. Para evitarlo, imagina a una señora con una bayeta absorbente, recogiendo agua del mármol de su cocina, y piensa: "*La señora* ***Coseno*** *usa una bayeta muy* ***Secante***".

RAMON FERRER I MARÍ

Funciones trigonométricas $y = \text{sen } x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg } x$	**Funciones seno y coseno:** *Dominio*: Todos los números reales *Recorrido*: $[-1, 1]$ Continuas en todo el dominio. Periódicas de período 2π **Función tangente:** *Dominio y continuidad*: Todo $\Re$ salvo $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En esos valores hay asíntotas verticales) *Recorrido*: Todos los números reales. Periódica de periodo π. **Simetría:** Funciones seno y tangente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

Teorema del seno y del coseno

Autor:JLF

Tema:Coseno, Seno

Introducción

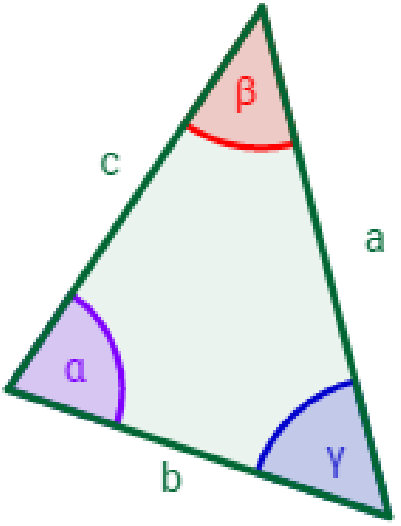
El teorema del seno y el teorema del coseno son dos resultados que establecen las relaciones entre los ángulos interiores de cualquier triángulo con el seno y coseno de los ángulos opuestos a los lados.

Su aplicación permite conocer los ángulos o los lados del triángulo sin conocerlos todos. A continuación, enunciamos ambos teoremas y daremos un ejemplo de aplicación.

RAMON FERRER I M...

1. Teorema del seno

Sea un triángulo cualquiera con lados , y y con ángulos interiores opuestos , y , respectivamente,



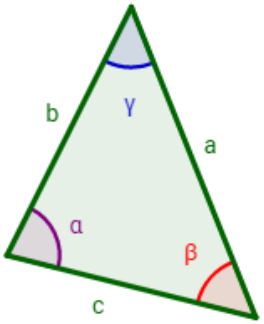
entonces $$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$$

Además, si el triángulo está inscrito en una circunferencia de diámetro D,

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = D$$

2. Teorema del coseno

Dado el triángulo del resultado anterior, el teorema del coseno establece que



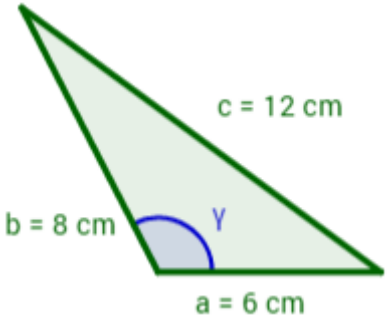
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

3. Ejemplos de aplicación

Problema 1 Calcular el ángulo del siguiente



triángulo de lados , y :

Solución: Aplicamos la siguiente fórmula del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

RAMON FERNÁNDEZ MARÍ

Sólo tenemos que sustituir los datos y aislar el

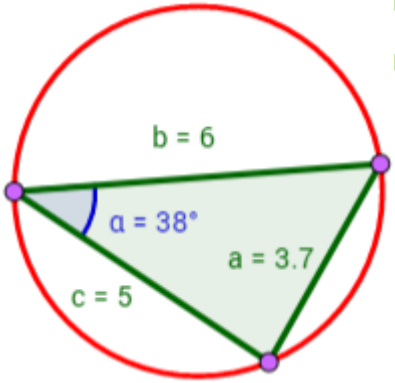
$$\gamma = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{12^2 - 6^2 - 8^2}{-2 \cdot 6 \cdot 8}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{11}{24}\right)$$

ángulo : $\gamma = 117.28°$

Problema 2 Calcular el radio y el diámetro de la circunferencia en la que está inscrita el siguiente triángulo del que sólo se conoce el ángulo :



Solución: El teorema del seno proporciona el diámetro D:

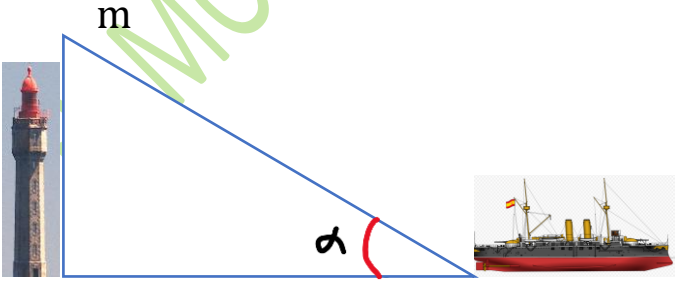
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = D$$

Conociendo ángulo y su lado opuesto, , podemos calcular el

diámetro: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = D$ Sustituimos los datos: $\frac{3}{\sin(38°)} = D$ Luego el diámetro mide $D = 4.8728\ cm$

Veamos una aplicación práctica de la trigonometría:

Desde el puente de mando de un buque, su capitán apunta el telémetro láser hacia la cúpula del faro. La medición indica que la distancia m entre el buque y la cúpula del faro es de 959 metros y el ángulo $\propto$ muestra una lectura de 4,01 grados. Con esos datos, hay que averiguar la altura del faro.



Siendo el ángulo α tenemos que la hipotenusa es m, el cateto opuesto será X.

RAMON FERRER I MARÍ

- Para averiguar la altura del faro, a la que llamaremos X, usaremos la fórmula del Seno:

Seno $\alpha = \frac{co}{h}$ ➡ Seno α = 4,01 grados h= 959 metros co = X

$$\text{Seno } 4{,}01 \text{ grados} = \frac{X}{959}$$

Seno 4,01 grados · 959 = X

Seno 4,01 grados = 0,069 · 959 = **67,06 metros.**

RER I MARÍ

Nota:

Un telémetro láser es un instrumento para medir distancias, que funciona utilizando la medición del tiempo que tarda un pulso de luz láser en reflejarse en un punto determinado y su retorno al punto de orígen.

3. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En el capítulo 7 has estudiado Trigonometría, por lo que ya conoces las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Ahora vamos a estudiar las funciones trigonométricas y sus propiedades.

Recuerda que:

Un radian se define como la medida del ángulo central cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Por tanto:

360° equivalen a 2π radianes

De donde se deduce que:

180° equivalen a π radianes

90° equivalen a π/2 radianes ...

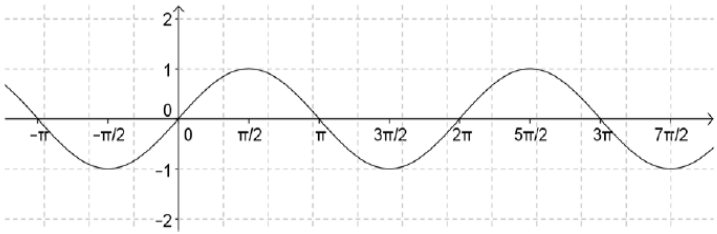
3.1. Las funciones seno y coseno

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

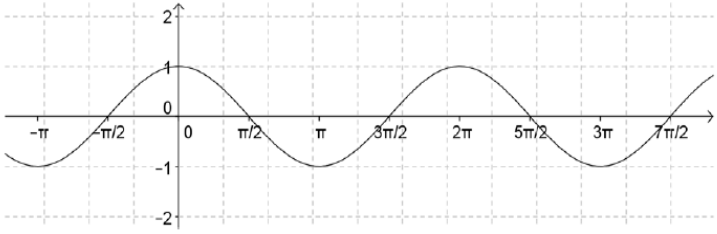
Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

Gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$



Gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Ya sabes cuánto vale π, π = 3.14.... Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.

Propiedades de estas funciones:

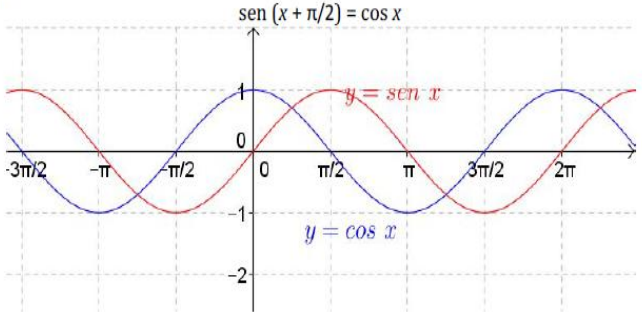
- Ambas son periódicas y el valor de su período es 2π.

  $sen\,(x + 2\pi) = sen\,x$ $\qquad$ $cos\,(x + 2\pi) = cos\,x$

- Son funciones continuas en todo su dominio.
- Su dominio son todos los números reales.
- Su recorrido es el intervalo [−1 , 1].

- La función seno tiene simetría impar (simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, $sen\ x = -sen\ (-x)$) y la función coseno tiene simetría par (simétrica respecto del eje OY, es decir, $cos\ x = cos\ (-x)$).
- Ambas funciones tienen la misma gráfica, pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido horizontal.

Es decir:

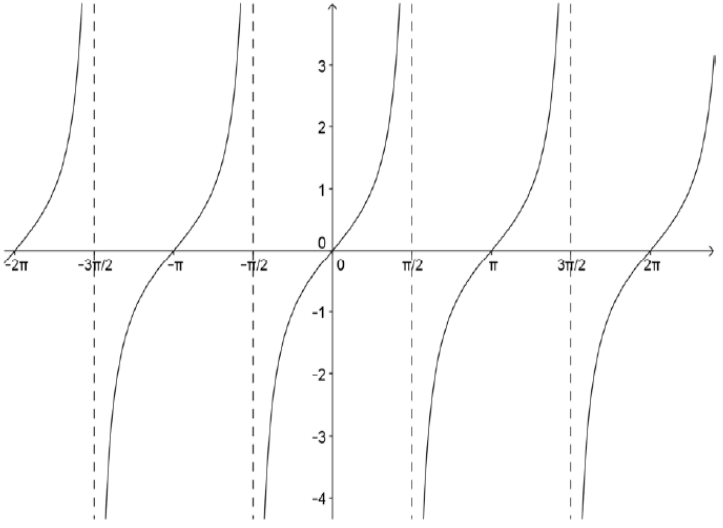


3.2. La función tangente

Esta función es diferente a las otras dos. Por esa razón la presentamos separadamente.

Ya sabes que como razones trigonométricas: $tg\ x = sen\ x / cos\ x$.

La gráfica de la función $f(x) = tg\ x$ es la siguiente:



Recordamos en primer lugar que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

Las propiedades de esta función son las siguientes:

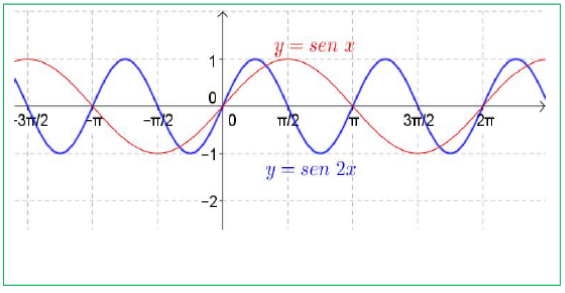
- Es una función periódica y el valor de su período es ahora menor, es π: tg $(x+\pi)$ = tg x.
- Su dominio son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), donde no existe. En esos valores presenta discontinuidades llamadas discontinuidades *inevitables*, porque no se podrían "taponar" mediante un punto.
- Tiene asíntotas verticales en esos mismos valores de la x. Las hemos representado en el gráfico mediante líneas discontinuas.
- Tiene simetría impar: es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que tg (x) = – tg $(-x)$

Actividades resueltas

Representa las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(2x)$ e $y = 2\text{sen } x$ comparándolas después con la gráfica de $y = \text{sen } x$.

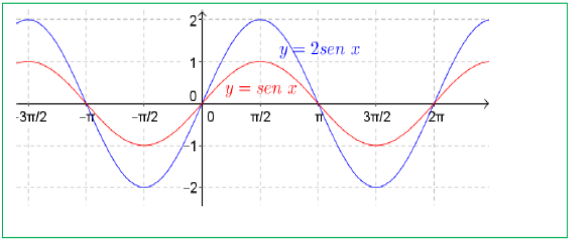
Solución:

Dando valores con la calculadora obtenemos las siguientes gráficas, representadas en azul junto a la de la función sen x, representada en rojo:



La gráfica de $y = \text{sen}(2x)$ es igual a la de $y = \text{sen } x$ contrayéndola horizontalmente. Cambia el periodo, que ahora es de π.

La gráfica de $y = 2\text{sen } x$ es igual a la de $y = \text{sen } x$ expandiéndola verticalmente. Tienen el mismo periodo, pero cambia la amplitud. Cuando $y = \text{sen } x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 1, $y = 2\text{sen } x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 2. Decimos que su amplitud vale 2.



Una aplicación práctica de la función Seno: La Electricidad y la Corriente Alterna (CA)

https://www.ingmecafenix.com/electronica/electricidad/conceptos-electricidad/

Electricidad

Se denomina electricidad a la forma de energía que produce efectos luminosos, mecánicos, caloríficos, químicos, etc., y que se debe a la separación o movimiento de los electrones que forman los átomos.

Corriente eléctrica

Es el paso o flujo de electrones a través de un conductor. Los electrones se desplazan de un potencial negativo a un potencial positivo.

Corriente continua (D.C. – C.C)

No presenta variación ni en magnitud ni en sentido.

Corriente alterna (A.C. – C.A.)

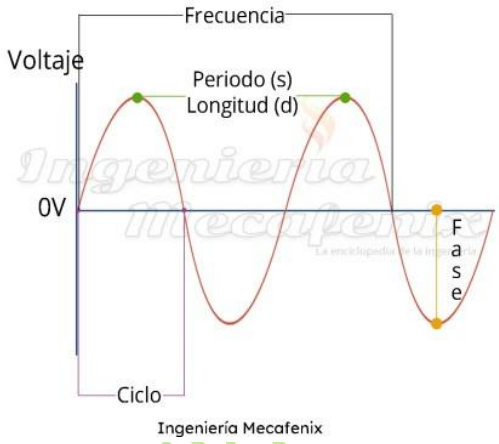
Varia a intervalos periódicos, tanto en magnitud como en sentido. En Europa, va de +220V a -220V con una frecuencia de 50 Hz.

Ingeniería Mecafenix

Características corriente alterna

- **Ciclo:** Variación completa de la tensión y/o corriente de 0 a un valor máximo positivo y luego a 0, de 0 a un valor máximo negativo y finalmente a 0.
- **Frecuencia (f):** Número de ciclos que se producen en un segundo. La unidad de medida es el Hertz (Hz), Equivale a un ciclo por segundo
- **Periodo (T):** Es el tiempo necesario para que se efectúe un ciclo completo. Se mide en segundos
- **Longitud de onda:** Distancia que recorre la corriente durante un ciclo.

- **Amplitud de onda:** Distancia que hay entre un 0 y valor máximo
- **Fase:** Relación de tiempo existente entre tensiones y/o corrientes alternas independientemente de sus magnitudes.



- **Angulo fase:** Posición de un punto, de una onda, en determinado momento
- **Desfase:** Dos ondas (que tienen la misma longitud, no necesariamente la misma amplitud) están desfasadas si sus valores máximos no se producen al mismo tiempo por consiguiente una estará adelantada o atrasada con relación a la otra. se mide en grados.

Ingeniería Mecafenix

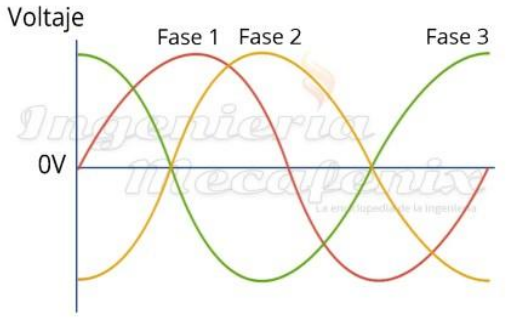
Valores fundamentales corriente alterna

- **Instantáneo:** Valor que tiene la tensión o corriente en un instante determinado de un ciclo.
- **Máximo o pico:** Valor instantáneo máximo que puede alcanzar la tensión o corriente en un semiciclo.
- **Medio:** Es el promedio de todos los valores instantáneos de medio ciclo.
- **Eficaz:** Aquel que un circuito puramente resistivo produce la misma cantidad de calor que la que puede producir una corriente continua del mismo valor. El valor eficaz se obtiene multiplicando el valor pico por 0.707 (raíz cuadrada de 2).

Ingeniería Mecafenix

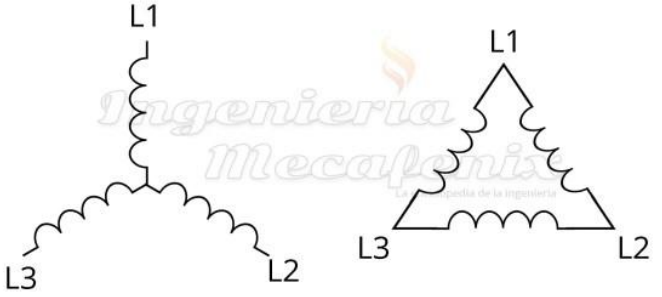
Toma corrientes

- **Sistema monofásico:** Sistema generado por la rotación de una sola bobina. Se emplea una fase y un neutro (sistema bifilar).
- **Sistema bifásico:** Sistema generado por la rotación de dos bobinas defasadas entre si 90º. Se emplean dos fases (sistema bifilar)
- **Sistema trifásico:** Sistema generado por la rotación de tres bobinas defasadas entre si 120º.



Ingeniería Mecafenix

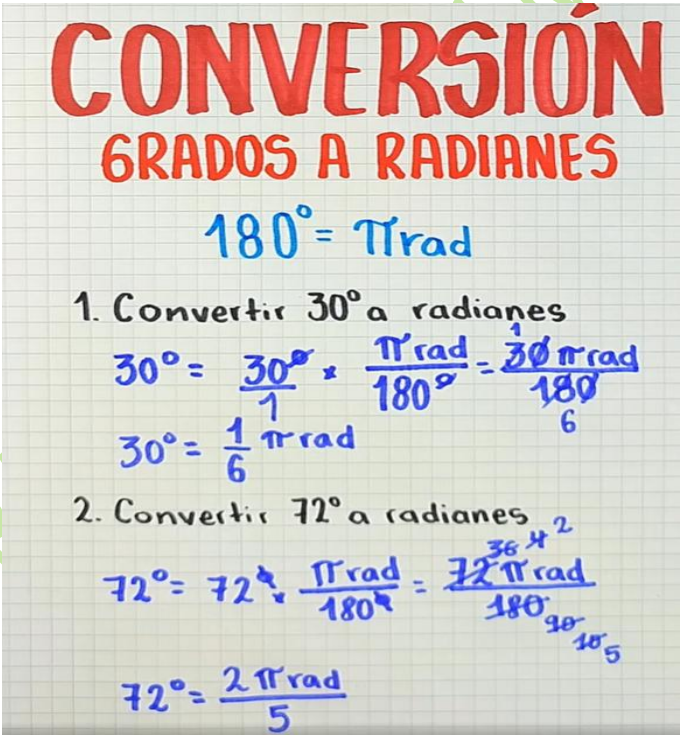
Las bobinas generadoras se pueden conectar en triángulo o estrella, La conexión más usada es estrella, que consiste en unir los tres finales entre sí, de donde se obtiene el conductor neutro (N), dejando libres los principales los cuales nos entregan las fases.



Ingeniería Mecafenix

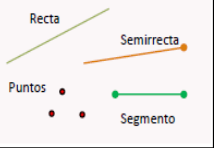
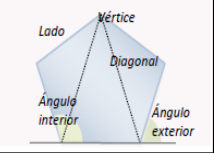
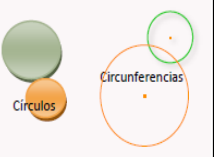
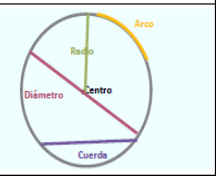
Diagramas o esquemas

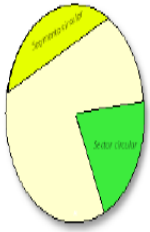
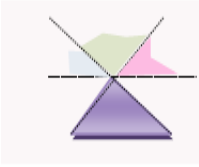
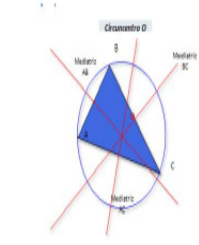
- **Unifilar:** Conductor con un cable.
- **Bifilar:** Conductor con dos cables.
- **Trifilar:** Conductor con tres cables
- **Tetrafilar:** Conductor con cuatro cables.
- Si se emplean solamente las tres fases se obtiene un sistema trifilar, Si se usan las tres fases y el neutro se obtiene un sistema tetrafilar.



https://www.facebook.com/JuegosMatematicosOficial/videos/965784518293522

RESUMEN

Elementos del plano	Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos	
Posición relativa de dos rectas	Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes	
Polígonos. Elementos de un polígono	Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores	
Clasificación de los polígonos	Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,...	
Circunferencia y círculo	Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una circunferencia.	
Elementos de una circunferencia	Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.	

Sector circular, segmento circular y corona circular	Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios. Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos. Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.	
Clasificación de triángulos	Según los ángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,	
Propiedades	La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.	
Rectas y puntos notables en un triángulo	Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.	
Clasificación de los cuadriláteros	Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos. Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Los no paralelogramos pueden ser trapecios o trapezoides.	

Índice

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

1.1. CONCEPTO DE PERÍMETRO Y DE ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

1.2. TEOREMA DE PITÁGORAS

2. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

2.1. ÁREA DEL CUADRADO Y DEL RECTÁNGULO

2.2. ÁREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIÁNGULO

2.3. ÁREA DEL TRAPECIO, ROMBO Y ROMBOIDE

2.4. ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES

2.5. ÁREA DE POLÍGONOS IRREGULARES

2.6. PERÍMETROS DE POLÍGONOS

3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

3.1. LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA

3.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

3.3. ÁREA DEL CÍRCULO

3.4. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR

3.5. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

3.6. OTRAS ÁREAS

Resumen

En este tema aprenderemos a hallar el perímetro y el área de las principales figuras planas: triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecio, circunferencia, círculo, ...

Veremos además diferentes tipos de triángulos y el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos.

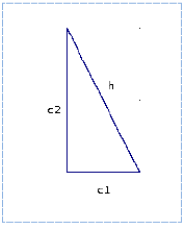
1.2. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

Recuerda que:

Un **triángulo** es **rectángulo,** si tiene un ángulo recto.

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

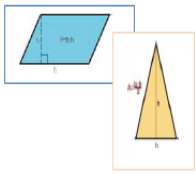
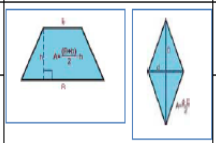
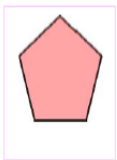
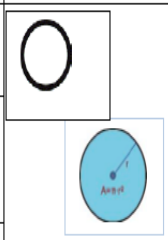
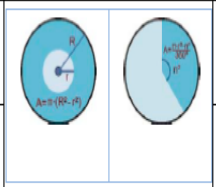
- Del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

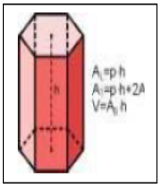
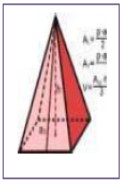
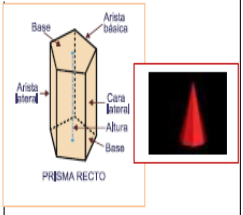
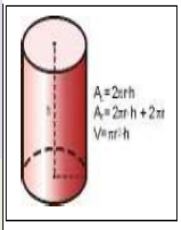
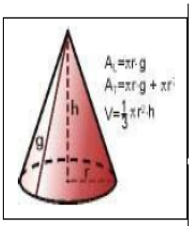
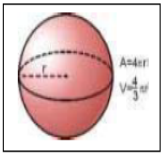
- También podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 *cm* y 4 *cm*, su hipotenusa vale 5 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ cm.$$

Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$		$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	A = lado^2 = l^2		Si $l = 4\ cm \Rightarrow A = 16\ cm^2$
Área del rectángulo	A = base por altura = $a \cdot b$		Si $a = 3\ cm$, $b = 5\ cm \Rightarrow A = 15\ cm^2$.
Área del paralelogramo	A = base por altura = $a \cdot b$		$a = 7\ m$, $b = 9\ m \Rightarrow A = 63\ m^2$
Área del triángulo	A = (base por altura)/2 = $a \cdot b/2$		$a = 5$ m, $b = 6$ m $\Rightarrow A = 15$ m^2
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura		$B = 7$; $b = 3$; $h = 5 \Rightarrow A = 25$
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2		$D = 4$, $D = 9 \Rightarrow A = 36/2 = 18$
Área de un polígono regular	Área es igual al semiperímetro por la apotema		Lado = 6 *cm*, apotema = 5 *cm*, número de lados = 5 $\Rightarrow$ Perímetro = $6 \cdot 5 = 30\ cm$; Área = $15 \cdot 5 = 75\ cm^2$.
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados		
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r, la longitud es igual a $2 \cdot \pi \cdot r$.		Radio = $3\ cm \Rightarrow$ Longitud = $6\pi \approx 18{,}84\ cm$. Área = $9\pi \approx 28{,}26\ cm^2$. Si $\alpha = 30º$ y $r = 3\ cm$ $\Rightarrow$Longitud del arco = $2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0{,}5\pi \approx 1{,}57\ cm$
Longitud de un arco de circunferencia	Si abarca un arco α, longitud es igual a $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$		
Área del círculo	Si el radio es r, el área es igual a $\pi \cdot r^2$.		
Área de la corona circular	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor.		$R = 7$, $r = 3 \Rightarrow A = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125{,}6\ u^2$
Área del sector circular	Si abarca un arco nº, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot n/360$.		$R = 4\ cm$, $n = 60º \Rightarrow A = \pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8{,}373\ cm^2$

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
Elementos del espacio	Puntos, rectas y planos	
Sistemas de representación	Planta, perfil y alzado. Tomografía. perspectiva caballera.	
Posiciones relativas	Dos planos o se cortan o son paralelos. Dos rectas en el espacio o se cortan o son paralelas o se cruzan. Una recta y un plano o la recta está contenida en el plano, o lo corta o es paralela.	
Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos	
Poliedros regulares	Poliedro con todas las caras polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.	Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, e icosaedro.
Prisma. Volumen **Pirámide. Volumen.**	 	
Cilindro. Volumen. **Cono. Volumen.**	 	Un cilindro de radio 3 m y altura 5 m tiene un volumen de 45π m^3, y una superficie lateral de 30π m^2. Un cono de radio 3 m y altura 5 m, tiene un volumen de 15 m^3.
Esfera. Volumen. Superficie		Una esfera de radio 3 tiene un volumen de 36π m^3, y una superficie de 36π m^2.

ARITMÉTICA DE LAS PROPORCIONES.

1. RAZÓN Y PROPORCIÓN

1.1. RAZÓN

1.2. PROPORCIÓN

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

2.1. REGLA DE TRES DIRECTA

2.2. PORCENTAJES

2.3. DESCUENTO PORCENTUAL

2.4. INCREMENTO PORCENTUAL

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

4.1. PROPORCIÓN INVERSA

4.2. REGLA DE TRES INVERSA

5. REGLA DE TRES COMPUESTA

5.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resumen

En este capítulo aprenderemos a utilizar instrumentos que nos permitan establecer comparaciones entre magnitudes.

Estudiaremos las diferencias entre proporcionalidad directa e inversa, aplicando métodos de resolución de problemas.

Aprenderemos a aplicar e interpretar los porcentajes y su aplicación en la vida cotidiana.

Aplicaremos los conocimientos sobre proporcionalidad en la interpretación de escalas y mapas.

Si conoces la escala o proporción de esta fotografía puedes saber el tamaño real de estas flores midiendo sobre la foto.

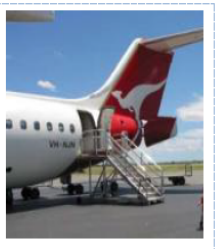
Interpretación de mapas

2.1. Regla de tres directa

Para resolver problemas de proporcionalidad directa, podemos utilizar el **método de reducción a la unidad.**

Ejemplo 6:

- Cinco billetes de avión costaron 690 €. ¿Cuánto pagaremos por 18 billetes para el mismo recorrido?



Primero calculamos el precio de un billete, 690 : 5 = 138 €.

Después calculamos el coste de los 18 billetes: 138 · 18 = 2484 €.

La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción.

Ejemplo 7:

- Con dos kilos de pienso mis gatos comen durante 6 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 15 días?

Formamos la proporción ordenando los datos: $\frac{2\text{ kg}}{X\text{ kg}} = \frac{6\text{ días}}{15\text{ días}}$ $\quad x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\text{ kg.}$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

2kg _____ 6días $\quad x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\text{ kg.}$

X kg _____ 15 días

Ideas claras

En la regla de tres directa ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

Constructo[15] de Ramon o "Regla de la L":

"En toda Regla de tres hay que multiplicar entre sí los dos datos contiguos a la X y dividirlos entre el dato más alejado de la X"

$$X = \frac{a * c}{b}$$

[15] Construcción teórica para comprender un problema determinado. RAE.

ARITMÉTICA DEL DIA A DIA. LA REGLA DE TRES.

La Regla de Tres es una utilísima aplicación de la Aritmética, que nos permite averiguar un dato, a partir de otros tres.

"(…) Desde entonces los problemas de regla de tres, no han dejado de estar presentes en los libros de aritmética, con un fundamento matemático que se relaciona con los conceptos de la teoría de las razones y proporciones de Euclídes. Así, por ejemplo aparece en el libro de Pérez de Moya (1562): "Dícese regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se aya en tal proporción con el tercero como el segundo con el primero. Lo cual muestra Euclides en la decimosexta del sexto, a do dice: dadas 3 quantidades continuas proporcionales, para hallar la quarta multiplicarás la segunda por la tercera y partirás por la primera." (p. 220)"[16]

$$x = \frac{2*3}{1}$$

RAMON FERRER I MARÍ

[16]Bernardo Gómez. Departament de Didàctica de la Matemàtica Universitat de València. Los Ritos en la Enseñanza de la Regla de Tres

Me ha sido de muchísima utilidad a lo largo de mi vida personal y profesional. Considero fundamental el dominarla a la perfección. Te voy a dar los pasos para que te salgan unas reglas de tres perfectas:

Paso 1:EL CUADRADO DE DATOS.

Denomino el cuadrado de datos a la distribución que toca hacer de los tres datos, de dos grupos diferentes, que nos aportan para poder averiguar el cuarto dato, que es la incógnita. Personalmente prefiero agrupar el cuadrado ordenando los datos por sus dos grupos, dejando siempre la X abajo y a la izquierda, tal que así.

GRUPO DE DATOS 1	GRUPO DE DATOS 2
a	b
X	c

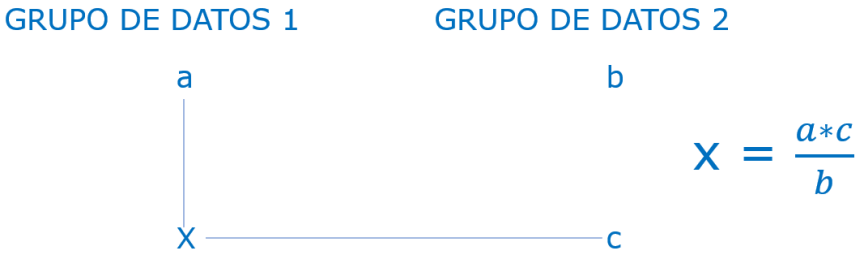
RAMON FERRERI MARÍ

Paso 2:**Operación si la relación entre los datos es directamente proporcional = Regla de 3 directa.**

Aplicamos lo que yo llamo "La Regla de la L":

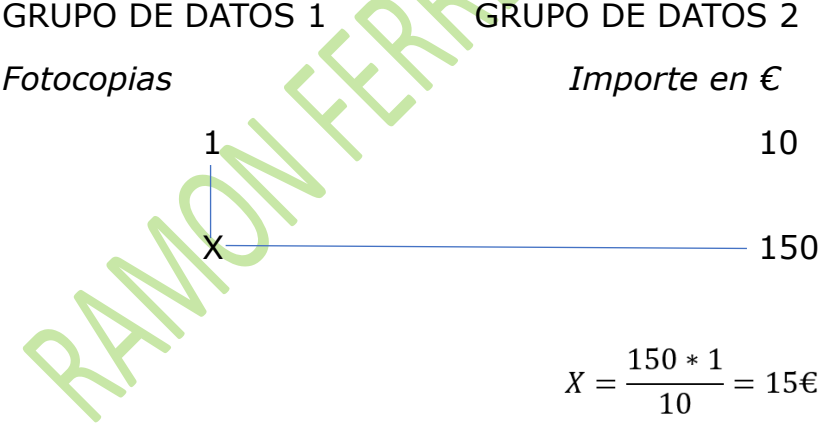
En el punto donde se une los dos palitos de la L, lo hacemos coincidir con la X, para así unir los dos datos contiguos a la X. Acto seguido, los

dividiremos entre el dato más alejado de la X. Tal que así:



Veámoslo mejor con un Ejemplo:

Si 10 fotocopias nos cuestan 1€, ¿Cuánto nos costarán 150 fotocopias?



Como podéis ver, los grupos de datos son dos: Las fotocopias y el importe en €, así que hemos hecho dos columnas, una para cada grupo de datos. Y lo mismo, en cualquier regla de tres.

RAMON FERRER I MAR

Paso 3: **Operación si la relación entre los datos es inversamente proporcional = Regla de 3 inversa.**

La peculiaridad de esta regla de tres inversa es que hay dos formas diferentes de resolverla:

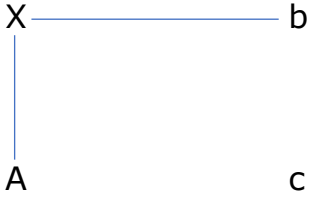
Hacemos los pasos 1 y 2, como de costumbre

Vía 3.1 Resolución ortodoxa, que implica hacer cambios:

Como la proporción es inversamente proporcional, **hay que INVERTIR el orden de los datos en la columna de la X,** es decir, subimos la **X** de abajo a arriba, y bajamos la **a**, de arriba abajo. Es importante no olvidar que, como hemos movido la X de sitio, también hay que actualizar las posiciones en la regla de la L, tal que así:

RAMON FERRER I MARÍ

Es decir, elaboramos el cuadrado de datos como siempre, **pero hacemos el cambio de posiciones entre la X y a**:



$$X = \frac{a*b}{c}$$

Ejemplo: Tres amigas van de vacaciones a Almería y alquilan un apartamento en la playa. El alquiler les cuesta 420€ a cada una. ¿Cuánto tendrían que poner si se les añaden dos amigas más?

€	amigas
420	3
X	5

€	amigas
X	3
420	5

$$X = \frac{420*3}{5} = 252€$$

Vía 3.2: Vía rápida, sin cambios: "No invertir los datos,Tapar la X con el dedo, poner una línea gigante que separe los datos de arriba de los de abajo y operar como si fuera un quebrado gigante":

Es la vía más sencilla de todas y la que yo recomiendo, ya que no tenemos que preocuparnos de recordar que hemos de invertir las posiciones de x y a. La cosa queda así.

RAMON FERRERI MARÍ

Primera maniobra: Tapar la X con el dedo. Aquí lo simbolizaremos poniendo este punto

Segunda maniobra: Poner una línea gigante que separe los datos de arriba de los de abajo.

Tercera maniobra: Operar como si fuera un quebrado gigante, es decir, multiplicamos entre sí los datos de arriba y dividimos entre el dato de abajo. La cosa quedaría así:

a b

c

$$X = \frac{a*b}{c}$$

Aplicando esto al problema de las amigas, tenemos que:

€	amigas
420	3
	5

$$X = \frac{420*3}{5} = 252€$$

Como podéis ver, el resultado es el mismo y nos ahorramos el peligro de olvidarnos de cambiar la X de sitio, un error que nos dará un resultado equivocado.

USA TU CEREBRO A LA ANTIGUA USANZA: Cómo calcular porcentajes rápidamente sin usar calculadora.

Imagina que te dán un folio A4, un bolígrafo y te piden que, con sólo esas herramientas, obtengas el 12% de 1500. Y encima, te dán apenas un minuto de tiempo para que respondas…

Antes que te dé un patatús te voy a enseñar la herramienta mental que hago servir yo, para hacer estos cálculos rápidamente.

Paso uno: Asumiendo que la cifra dada es el 100% de esa cifra (el 100% de 1500 es el própio 1500), obtengo primero el 10%, que es 150, puesto que sólo tengo que quitarle un cero por la derecha 1500.

Paso dos: Obtengo el 1% quitándole al 10% otro cero por la derecha 150 y me queda 15. También puedo coger el 1500 original y quitarle dos ceros de golpe, con lo que llego al mismo resultado, es decir 15.

Paso tres: Voy sumando esos resultados hasta obtener el porcentaje que me han pedido

¿Qué me han pedido? El 12% de 1500	
10% de 1500	150
1% de 1500	15
1% de 1500	15
TOTAL	180

RAMON FERRERI MARÍ

Y ahora es cuando mi querida amiga Maria Primitiva me dice: *"A ver, Genio de la lámpara maravillosa, ese ejemplo es muy sencillo porque has tomado un número con ceros… Pero si te pido el 35% de 2355 ¿Cómo me lo resuelves?".*

Pues igual, pero en vez de ir quitando ceros, porque no los tengo, lo que hago es mover la coma de derecha a izquierda, un salto para obtener el 10% y dos saltos para el 1%, tal que así:

Si el 100% de 2355 es 2355, el 10% será 235,5 y el 1% será 23,55.

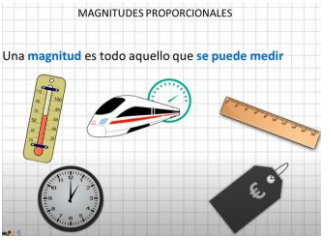
Como me piden el 35% de 2355 será cuestión de multiplicar el 10% por 3, el 1% por 5 y sumar ambas cifras:

235,5 x 3 (para obtener el 30%) + 23,55 x 5 (para obtener el 5%) y el resultado es **706,50 + 117,75 = 824,25.**

RAMÓN FERRER I MARÍ

ARITMÉTICA DE LAS PROPORCIONES.

En nuestra ruta por las matemáticas cotidianas, vamos a hablar de un tema importante, la comparación[17] entre diferentes magnitudes.



Dicha comparación puede ser simple (comparamos dos cantidades equivalentes entre si), por ejemplo, 2 metros es el doble de 1 metro.

Pero también puede ser compuesta (lo más habitual) cuando comparamos cantidades de diferentes magnitudes. Veamos un ejemplo: la siguiente tabla que nos relaciona la magnitud edad, que se mide en años, con la magnitud altura, que se expresa en centímetros:

Medidas niño/niña

Edad	3	4	5	6
Altura	98	104	110	116

Así pues, una niña de 5 añitos mide 110 centímetros de altura, según la tabla anterior.

PRIMER ERROR: Confundir directamente proporcional e inversamente proporcional, con los conceptos Creciente o Decreciente.

[17] Comparación : tr. Establecer la semejanza de una persona o cosa con otra.

RAMON FERRER I MARÍ

Ojo al Cristo, que es de Plata, porque aunque se parecen No significan lo mismo. Veámoslo:

Directamente proporcional es esto:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al **aumentar** una de ellas la otra **también aumenta** (y viceversa)

Así pues, si tomamos la tabla de edades, ésta es directamente proporcional, ya que la magnitud Altura aumenta (Creciente) o disminuye (Decreciente) con la edad.

Medidas niño/niña

Edad	3	4	5	6
Altura	98	104	110	116

Para los conceptos Creciente y decreciente, primero debemos establecer un punto de partida cualquiera y estudiar qué pasa con relación entre los datos aportados.

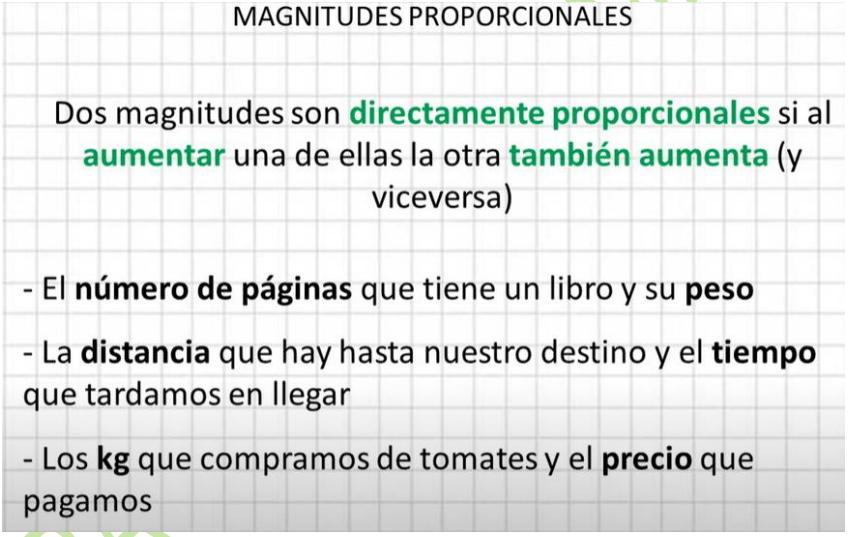
Así en el ejemplo anterior, tomamos como punto de partida la edad de 4 años, siendo Decreciente hacia la izquierda (A menos edad, más bajito) y Creciente hacia la derecha (contra más mayores, más altos).

Sin embargo, si la relación fuera inversamente proporcional, a más edad, serían más bajitos y eso NO se cumple → Una niña de seis años es 18 centímetros más alta que cuando tenía tres añitos.

RAMON FERRER I MARI

Con lo que podemos llegar a la conclusión que una relación directamente proporcional puede ser Creciente o Decreciente, porque ambos datos "*andan*" en la misma dirección.

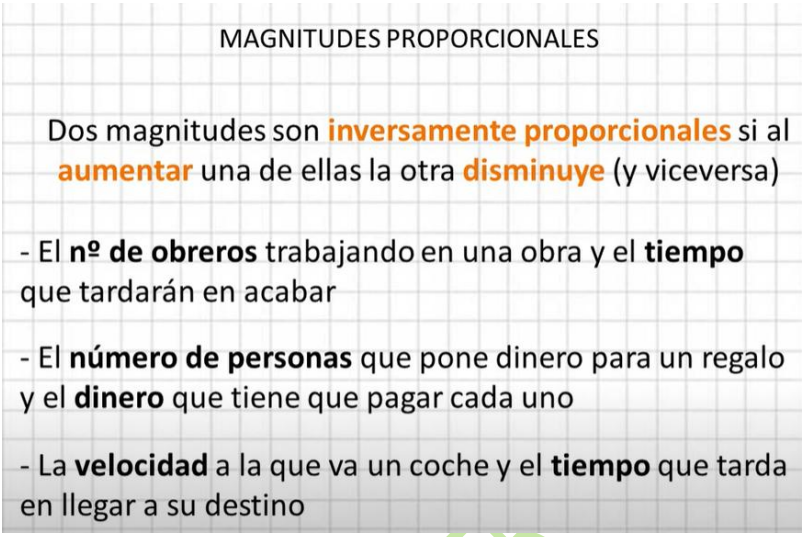
Sin embargo, en la relación inversamente proporcional, una magnitud "*anda*" en una dirección, y la otra lo hace en la contrária, por lo que no podemos hablar de Creciente o Decreciente.



Son directamente proporcionales porque:

- ✓ A mayor número de páginas, mayor peso tendrá el libro.
- ✓ A más distancia, más tardaremos en llegar.
- ✓ A más kilos de tomates compremos, más cara nos saldrá la factura.

Por el contrário tenemos:



Son inversamente proporcionales porque:

- ✓ Contra más obreros trabajen en una obra, menos tiempo tardaremos en terminarla.
- ✓ Contra más personas colaboren en el regalo, menos dinero tendrá que poner cada una.
- ✓ Contra más corra el coche, menos tiempo tardará en llegar a su destino.

RAMON FERRER

Vamos a introducir un concepto importante: El concepto de Razón.

RAZÓN

La **razón** entre dos números es el **cociente** (división) entre ellos $\frac{a}{b}$

Las razones sirven para comparar

1,35 m

1,80 m

$$\frac{1{,}35}{1{,}80} = 0{,}75$$

Al dividir las alturas del chico y la chica, obtenemos la cifra de 0,75, que se puede interpretar diciendo: "La altura del chico supone 0,75 veces la de la chica".

FERRER.IN

RAZÓN

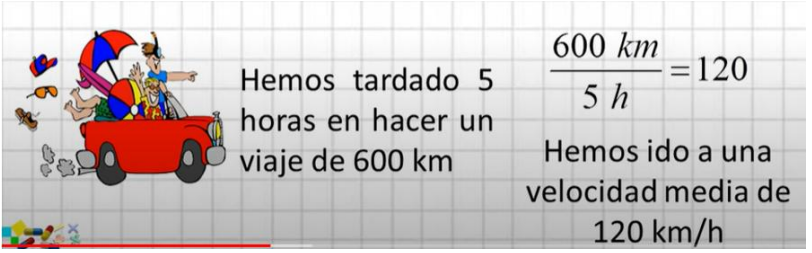
La **razón** entre dos números es el **cociente** (división) entre ellos $\frac{a}{b}$

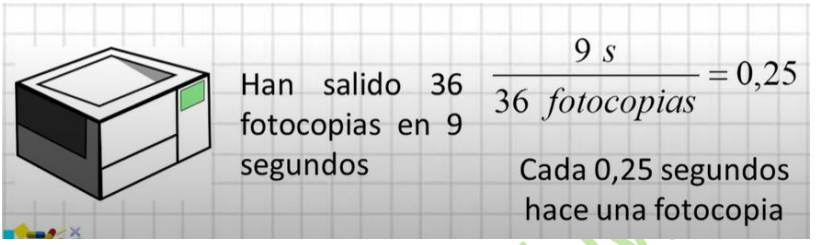
Cuando comparamos 2 magnitudes, la razón suele tener un significado

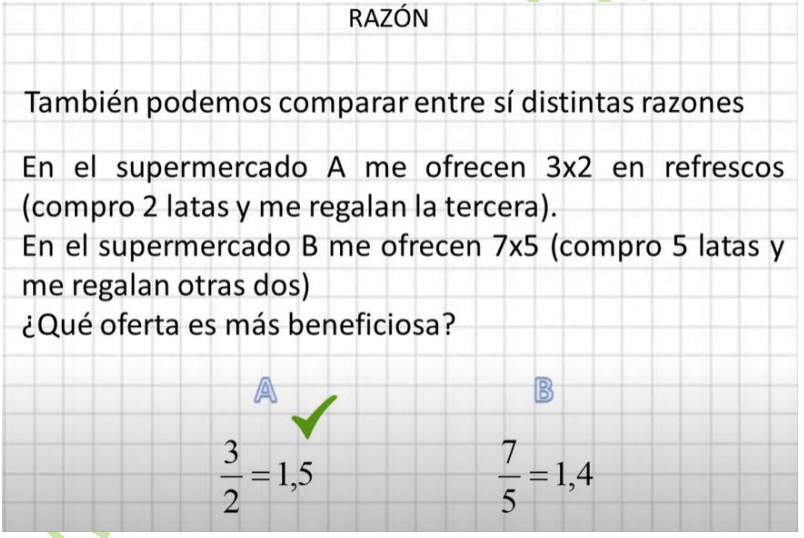
Cuatro amigos han salido a cenar, y la factura ha sido de 84 €

$$\frac{84\ €}{4\,amigos} = 21$$

Cada uno tiene que poner 21 euros





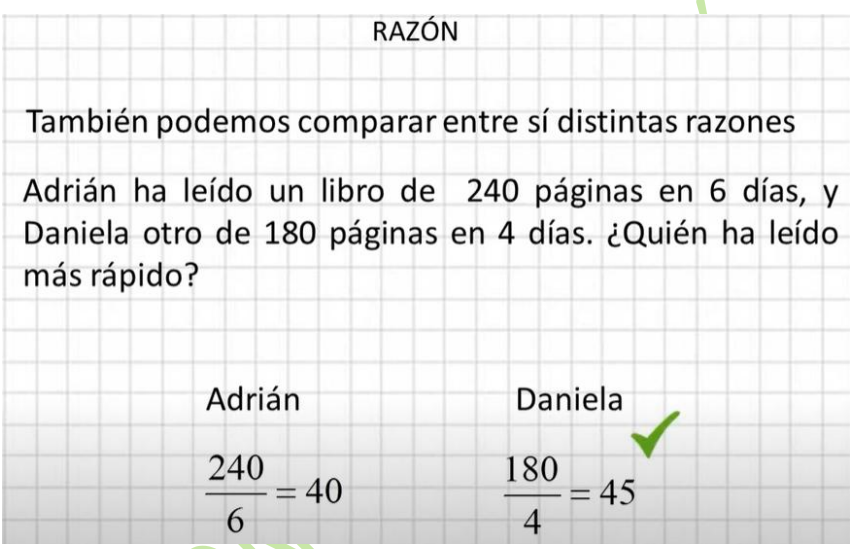


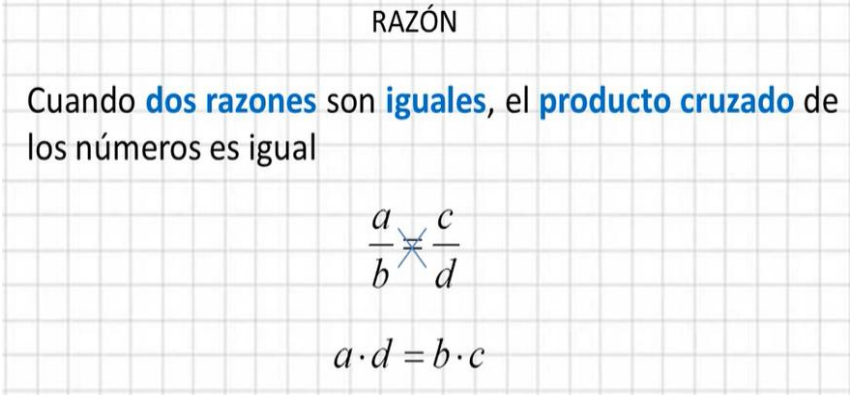
Explicación: En el supermercado A, pagamos dos latas y nos regalan 1 lata (proporción 2 a 1).

En el supermercado B, nos regalan dos latas pero tenemos que comprar cinco latas. Si aplicamos la misma proporción, 2 a 1, vemos que siempre pagaremos una lata de más, porque para que nos

diesen dos latas gratis, solamente tendríamos que comprar 4 latas y no las 5 de la supuesta "*oferta*".

Por eso siempre interesa que el resultado de la división sea el número más alto posible (1,5 frente a 1,4).





RAZÓN

Cuando **dos razones** son **iguales**, el **producto cruzado** de los números es igual

En el supermercado A me ofrecen 3x2 en refrescos y en el supermercado B me ofrecen 6x4. ¿Qué oferta es mejor?

A B

$$\frac{3}{2} \quad \frac{6}{4}$$

$$3 \cdot 4 = 12$$
$$2 \cdot 6 = 12$$

RAZÓN

Cuando **dos razones** son **iguales**, el **producto cruzado** de los números es igual

Una moto tarda 4 horas en hacer un viaje de 360 km. ¿Cuánto recorrería en 5 horas a esa misma velocidad?

$$\frac{360}{4} \quad \frac{x}{5}$$

$$360 \cdot 5 = 4 \cdot x$$
$$1800 = 4 \cdot x$$
$$\frac{1800}{4} = x$$

$$x = 450\ km$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Cuando dos magnitudes son **directamente proporcionales** la **razón** entre ellas (la **división**) es constante

Para resolver estos ejercicios pongo los datos dividiéndose, e igualo las divisiones

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Sabemos que 8 metros de una determinada tela cuestan 12 €. ¿Cuánto costarán 11 metros de tela?

$$\frac{8\ metros}{12\ €} = \frac{11\ metros}{x\ €}$$

$$8 \cdot x = 12 \cdot 11$$

$$8 \cdot x = 132$$

$$x = \frac{132}{8} \qquad x = 16{,}5\ €$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Un coche gasta un promedio de 40L de gasolina cada 300 km. ¿Cuántos litros gastará en un viaje de 120 km?

$$\frac{40\ litros}{300\ km} = \frac{x\ litros}{120\ km}$$

$$40 \cdot 120 = 300 \cdot x$$

$$4800 = 300 \cdot x$$

$$\frac{4800}{300} = x \qquad x = 16\ litros$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Hacer 35 fotocopias nos ha costado 2,5€. ¿Cuánto costará hacer 140 fotocopias?

$$\frac{35\ copias}{2{,}5\ €} = \frac{140\ copias}{x\ €}$$

$$\frac{35\ copias}{140\ copias} = \frac{2{,}5\ €}{x\ €}$$

$$35 \cdot x = 2{,}5 \cdot 140$$

$$35 \cdot x = 350$$

$$x = \frac{350}{35}$$

$$x = 10\ €$$

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Cómo resolver estos ejercicios:

- Tenemos una **cantidad a repartir**
- Tenemos varios **valores entre los que repartirla** de manera proporcional
- **Sumo** todos los **valores** aportados por cada persona
- **Divido** la **cantidad** a repartir entre esa suma de los **valores**
- **Multiplico** el resultado de esa división por el valor que ha aportado cada persona

Veámoslo mejor con un ejemplo:

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra. Juan la tiene 5 días; Pedro otros 3, y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 330 €. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Primer paso: **Sumo** todos los valores aportados por cada persona, tal que así:

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra. Juan la tiene 5 días; Pedro otros 3, y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 330 €. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Juan: 5
Pedro: 3
Rufino: 7
15 días

Segundo paso: **Divido** la cantidad a repartir entre esa suma de valores.

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra. Juan la tiene 5 días; Pedro otros 3, y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 330 €. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Juan: 5
Pedro: 3
Rufino: 7
15 días

$$\frac{330}{15} = 22 \text{ €/día}$$

Tercer paso: **Multiplico** el resultado de esa división por el valor que ha aportada cada persona

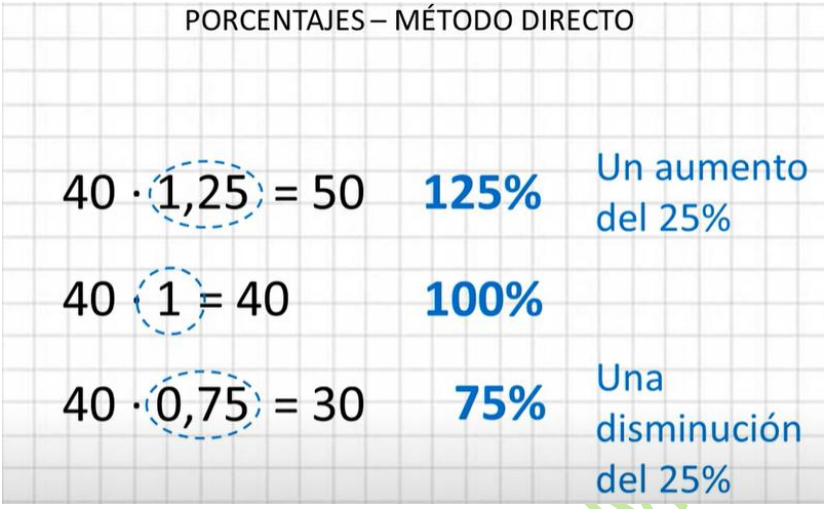
REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

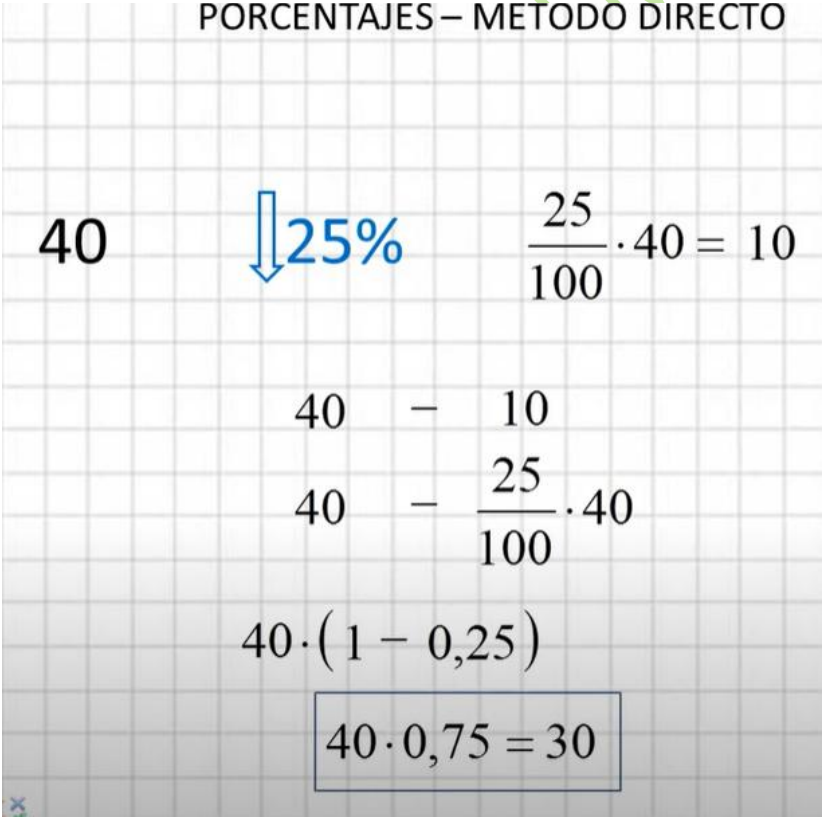
Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra. Juan la tiene 5 días; Pedro otros 3, y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 330 €. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Juan: $5 \cdot 22 = 110$ €
Pedro: $3 \cdot 22 = 66$ €
Rufino: $7 \cdot 22 = 154$ €
15 días

$110 + 66 + 154 = 330$

$$\frac{330}{15} = 22 \text{ €/día}$$


PORCENTAJES – MÉTODO DIRECTO
40 · 1,25 = 50
125%
Un aumento del 25%
40 · 1 = 40
100%
40 · 0,75 = 30
75%
Una disminución del 25%


PORCENTAJES – METODO DIRECTO
40
25%
$\frac{25}{100} \cdot 40 = 10$
$40 - 10$
$40 - \frac{25}{100} \cdot 40$
$40 \cdot (1 - 0{,}25)$
$40 \cdot 0{,}75 = 30$

Como vemos el único caso que nos presenta complicaciones es el de la disminución, donde debemos recordar que, para obtener el resultado correcto, debemos obtener el factor multiplicador haciendo primero la resta entre 100 menos el porcentaje de disminución que deseamos aplicar. En los dos ejemplos anteriores hacemos:

Disminución del 25% 100 – 25 = 75, le ponemos el 0, delante y obtenemos 0,75.

Disminución del 30% 100 – 30 = 70, le ponemos el 0, delante y obtenemos 0,70.

Como tengo el honor de ser Trabajador Social en un pueblo de Catalunya, voy a poner un ejemplo extraído directamente de mi práctica profesional habitual.

"Los Servicios Sociales del Ayuntamiento X legislan dar una ayuda social a las familias sin ingresos. Por cada persona de más de la familia, se incrementará en un 30% respecto al tramo de familia anterior.

Hacer una tabla sabiendo que el máximo que se dará será a la familia de seis o más miembros y que la cantidad inicial por una persona será de 600€."

Número de persona	Factor multiplicador	Cantidad asignada (€)
1	1,0	600
2	1,3	780
3	1,6	960
4	1,9	1.140
5	2,2	1.320
6 o más personas	2,5	1.500

RAMON FERRER I MARÍ

A la familia de un solo miembro le daremos el 100%, o sea, que tenemos que multiplicar por 1,0, y como incrementamos un 30% por persona adicional, a familia de dos miembros le corresponde un 130%, o sea, que multiplicamos por 1,3 y así, sucesivamente.

Calcula el Impuesto del Valor Añadido (I.V.A.).

En España el impuesto indirecto más extendido es el I.V.A. En 2025 se aplican tres tramos:

- ✓ 21%, así que multiplicaremos por 1,21.
- ✓ 10%, así que multiplicaremos por 1,10.
- ✓ 4%, así que multiplicaremos por 1,04.

2.3. Descuento porcentual

En muchos comercios aparecen los precios antes de la rebaja y los precios rebajados. Con esos dos datos podemos calcular el % de descuento.

Ejemplo 10:

- Una camisa costaba 34 € y en temporada de rebajas se vende a 24 €, ¿qué % de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

Calculamos el importe de la rebaja $34 - 24 = 10$ €.

Establecemos la proporción: $\frac{34}{10} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{10 \cdot 100}{34} = 29{,}41\%$.

Ejemplo 11:

- Al comprar un ordenador me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. He pagado 528 €. ¿Cuánto valía el ordenador sin descuento?

El precio inicial equivale al 100 %. Al aplicar el descuento, sólo pagaremos $100 - 12 = 88$ %.

Por tanto, debemos calcular el 100 %: $x = \frac{528 \cdot 100}{88} = 600$ €.

Ideas claras

El **descuento** es la diferencia entre la cantidad inicial y la cantidad final. Con estos datos podremos calcular el % de descuento aplicado.

Al descontarnos un x % de una cantidad, sólo pagaremos el $(100 - x)$ %.

2.4. Incremento porcentual

En los **incrementos porcentuales**, la cantidad inicial es menor que la final ya que el tanto por ciento aplicado se añade a la cantidad inicial.

Ejemplo 12:

- Por no pagar una multa de 150 € me han aplicado un 12 % de recargo.

Puedo calcular el 12% de 150 y sumarlo a 150: $\frac{12 \cdot 150}{100} = 18€$.

En total pagaré 150 + 18 = 168 €.

Ejemplo 13:

- Otra forma de aplicar el incremento porcentual puede ser calcular el % final a pagar:

En el caso anterior: 100 + 12 = 112 %.

Calculamos el 112 % de 150 €: $\frac{150 \cdot 112}{100} = 168€$.

Ejemplo 14:

- En un negocio he obtenido un 36 % de ganancias sobre el capital que invertí. Ahora mi capital asciende a 21760 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

El incremento porcentual del 36 % indica que los 21760 € son el 136 % del capital inicial.

Debemos calcular el 100 %: $\frac{21760 \cdot 100}{136} = 16000€$.

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**.

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida.

Ejemplo 15:

- En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 20 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm en la realidad.

Ejemplo 16:

- Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala 1 : 600. Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será: 3,5 · 600 = 2100 cm = 21 m.

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes.**

Ideas claras

La escala utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.
Por ejemplo: 1: 70000.
Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

.

Por lo que en la escala 1: 70000 nos están diciendo que cada centímetro del mapa representa una distancia de 700 metros en la realidad

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo 17:

- Un coche va a 90 km/h y tarda 3 horas en llegar a su destino. Si una moto va a 45 km/h, tardará 6 horas en recorrer la misma distancia.

Se comprueba que si la velocidad es el doble, el tiempo será la mitad, y ambos han recorrido los mismos kilómetros: $90 \cdot 3 = 270$ km $\qquad$ $45 \cdot 6 = 270$ km

En la proporcionalidad inversa, **la razón de proporcionalidad** es el producto de ambas magnitudes

Hay muchas situaciones en las que encontramos una relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes.

Ejemplos 18:

- El número de invitados a un cumpleaños y el trozo de tarta que le toca a cada uno.
- Las personas que colaboran en una mudanza y el tiempo que tardan.

Cuando conocemos la razón entre dos magnitudes inversamente proporcionales, podemos elaborar una tabla para diferentes valores:

Ejemplo 19:

- Tenemos una bolsa con 60 caramelos. Podemos repartirlos de varias maneras según el número de niños: 60 es la razón de proporcionalidad.

Número de niños	6	12	30	15	20
Número de caramelos para cada uno	10	5	2	4	3

Observa que cuando el número de niños aumenta, los caramelos que recibe cada uno disminuyen.

Ideas claras

Para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales, cuando una crece la otra decrece en la misma proporción.

La razón de proporcionalidad se calcula multiplicando las dos magnitudes.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al **aumentar** una de ellas la otra **disminuye** (y viceversa)

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Cómo resolver estos ejercicios:

- Tenemos una **cantidad a repartir**
- Tenemos varios **valores entre los que repartirla** de manera **inversamente** proporcional
- El **proceso es el mismo** que para los repartos directamente proporcionales, solo que en vez de repartir la cantidad entre los **valores**, la reparto entre el **INVERSO** de los **valores**

$\frac{1}{4}$

El inverso de 1 es $\frac{1}{4}$

Vamos a premiar a dos alumnos, repartiendo dos puntos entre ellos, premiando al que menos retrasos ha tenido llegando a clase.

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

2 puntos

2 retrasos

3 retrasos

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

2 puntos

2 $\frac{1}{2}$

3 $\frac{1}{3}$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{} = \frac{5}{6}$$

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

2 puntos

2 $\frac{1}{2}$

3 $\frac{1}{3}$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{1}:\frac{5}{6}=\frac{12}{5}=2,4$$

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

2 puntos

2 $\frac{1}{2}\cdot 2,4=1,2$

$1,2+0,8=2$

3 $\frac{1}{3}\cdot 2,4=0,8$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{1}:\frac{5}{6}=\frac{12}{5}=2,4$$

4.1 Regla de tres inversa

Una proporción entre dos pares de magnitudes inversamente proporcionales en la que se desconoce uno de sus términos se puede resolver utilizando la **regla de tres inversa**.

Ejemplo 20:

- Seis personas realizan un trabajo en 12 días, ¿cuánto tardarán 8 personas?

El coeficiente de proporcionalidad inversa es el mismo para las dos situaciones: $12 \cdot 6 = 72$.

Planteamos al regla de tres:

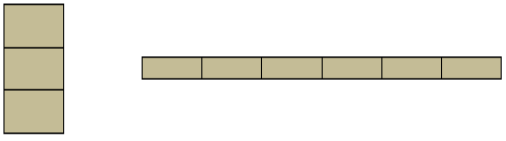
Seis personas tardan 12 días $\quad 12 \cdot 6 = 8 \cdot x \quad x = \dfrac{6 \cdot 12}{8} = 9$ días.

8 personas tardan x días.

En geometría encontramos ejemplos de proporcionalidad inversa.

Ejemplo 21:

- Estas dos superficies tienen distinta forma pero la misma área:



Observa que la primera tiene tres unidades de altura y una de base y la segunda, una altura de media unidad y seis unidades de base.

$$3 \cdot 1 = 0{,}5 \cdot 6 = 3.$$

Ejemplo 22:

- Observa estos vasos. Su capacidad depende tanto de su altura como de su base. Si dos vasos distintos tienen la misma capacidad pero distinta forma a mayor base menor altura y viceversa.

Ideas claras

Para resolver la regla de tres inversa se tiene en cuenta que el producto de cada par de magnitudes ha de ser el mismo, su coeficiente de proporcionalidad inversa.

5. REGLA DE TRES COMPUESTA

En algunos problemas de proporcionalidad aparecen más de dos magnitudes relacionadas entre sí, estableciendo lo que llamamos una **proporcionalidad compuesta**.

Las relaciones entre las magnitudes pueden ser todas directas, todas inversas o directas e inversas. Por ello, debemos aplicar los métodos de resolución tanto de regla de tres directa o inversa, una vez analizado el enunciado.

Ejemplo 23:

- Seis máquinas realizan 750 piezas durante 4 días ¿Cuántas piezas realizarán ocho máquinas iguales durante 10 días?

Planteamos los datos:

6 máquinas ..... 750 piezas ..... 4 días

8 máquinas ..... X piezas .....10 días

La relación entre las tres magnitudes es **directamente proporcional** ya que al aumentar o disminuir cada una de ellas, las otras dos aumentan o disminuyen.

Para calcular el resultado, aplicamos la proporcionalidad directa en dos pasos:

a) Máquinas y piezas: $x = \frac{8 \cdot 750}{6}$ ahora hay que tener en cuenta los días.

b) Al ser una proporción directa $x = \frac{8 \cdot 750 \cdot 10}{6 \cdot 4}$ = 2500 piezas.

Ejemplo 24:

- Tres fuentes abiertas durante 8 horas y manando 12 litros cada minuto llenan completamente un estanque. ¿Cuántas fuentes debemos abrir para llenar el mismo estanque en 5 horas y manando 20 litros por minuto?

Planteamos los datos:

5 fuentes ..... 8 horas ..... 12 L/min

X fuentes .....6 horas ..... 20 L/min

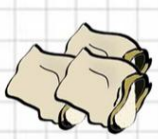
La relación entre estas tres magnitudes es **inversamente proporcional**, ya que con mayor caudal, tardarán menos tiempo en llenar el depósito.

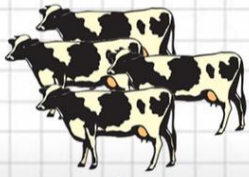
El producto de las tres variables $5 \cdot 8 \cdot 12$ debe ser igual al producto de $X \cdot 6 \cdot 20$, por tanto:

$$x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 12}{6 \cdot 20} = 4 \text{ fuentes.}$$

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Con 600 kg de pienso se pueden alimentar 40 vacas durante 8 días. ¿Cuántos días se podrá alimentar entonces a 20 vacas con 1500 kg de pienso?





Inversamente proporcionales

Directamente proporcionales

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Pasos a seguir:

1) Hago una **tabla** con las magnitudes del ejercicio. Es mejor si la magnitud con la incógnita se coloca al principio o al final

2) Pongo los **datos** en sus columnas

3) Estudio la **relación** entre cada magnitud y la magnitud **de la incógnita**

Kg de pienso	Nº de vacas	Días con comida

Inversa

Directa

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Kg de pienso		Nº de vacas		Días con comida
600 / 1500	·	20 / 40	=	8 / x

$$\frac{600}{1500}\cdot\frac{20}{40}=\frac{8}{x}$$

$$\frac{12000}{60000}=\frac{8}{x} \longrightarrow \frac{12}{60}=\frac{8}{x} \longrightarrow \frac{1}{5}=\frac{8}{x}$$

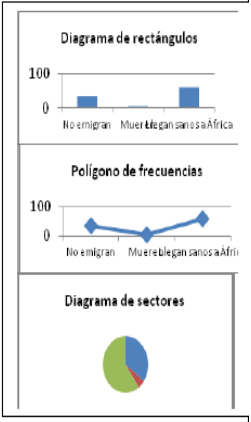
$$\longrightarrow 1\cdot x=5\cdot 8 \qquad x=40\ días$$

RESUMEN

Concepto	Definición	*Ejemplo*
Razón	Comparación entre los valores de dos variables.	Precio y cantidad.
Proporción	Igualdad entre dos razones.	A es a B como C es a D.
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.	24 es a 10 como 240 es a 100.
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes.	$\frac{300}{25}=$
Porcentajes	Razón con denominador 100.	$\frac{23}{100}=$
Escalas y planos	Comparación entre tamaño real y tamaño representado.	1 : 20000.
Magnitudes inversamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.	A por B es igual a C por D.
Razón de proporcionalidad inversa	Producto de ambas magnitudes.	45 · 70.

Estadística y Probabilidad. Nivel I

RESUMEN

Fenómeno o experimento aleatorio	Es aquel en el que no se puede predecir el resultado. Los datos estadísticos son los valores que se obtienen en un experimento.	Tirar una moneda y saber si va a salir cara o cruz.
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un dato estadístico.	Si al tirar un dado hemos 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Es la frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos.	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Frecuencia acumulada	Se suman las frecuencias anteriores.	
Suceso posible.	Posible resultado de un experimento aleatorio.	En el experimento aleatorio tirar un dado el conjunto de posibles resultados, o el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por tanto, un posible resultado es, por ejemplo, 3.
Espacio muestral	Conjunto de resultados posibles.	
Sucesos elementales	Elementos del espacio muestral.	
Diagrama de rectángulos	Los datos se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Diagrama de líneas	De unen los puntos superiores de un una diagrama de rectángulos.	
Pictograma	Se sustituye los rectángulos por un dibujo representativo.	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias.	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la **media** es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6.
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad.	La **moda** es: 5.
Moda	El valor que más se repite.	La **mediana** es 5

ÁLGEBRA.

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. LETRAS Y NÚMEROS

1.2. COEFICIENTE Y PARTE LITERAL

1.3. VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

1.4. EQUIVALENCIA Y SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

2.1. EL LENGUAJE DE LAS ECUACIONES

2.2. ECUACIONES EQUIVALENTES. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. PROCEDIMIENTO

3.2. PROBLEMAS NUMÉRICOS

3.3. PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

3.4. OTROS PROBLEMAS

Resumen

En la época de El Quijote, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel:

"ALGEBRISTA Y SANGRADOR"

¿Y eso, por qué? La palabra "Álgebra" es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "algoritmo". Hacia el año 825 escribió un libro titulado:

Al-jabr w'almuqabalah.

La palabra árabe jabr significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

El Álgebra es una materia nueva que ahora vamos a empezar a estudiar. Hay autores que opinan que el álgebra comienza cuando se utilizan letras en lugar de números, pero, recuerda, los romanos ya utilizaban letras, y eso no era álgebra. En realidad el origen del álgebra está en hacer operaciones con números simbolizados con letras, lo que supone un ahorro de esfuerzo, pues permite hacer de una sola vez lo que de otra manera habría que repetir muchas veces.

Aprenderemos a utilizar el lenguaje algebraico, resolveremos ecuaciones y un buen número de problemas.

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo 1:

- Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un cuadrado de lado a: $A = a^2$; el área de un círculo de radio r: $A = \pi r^2$.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la x.

Ejemplo 2:

- El doble de la edad de una persona $2x$
- El triple de un número menos 4 $3x - 4$

El propio *Al-jabr* usó originariamente la palabra "*cosa*", (por ejemplo, en lugar de $2x$ decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como "*šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la x actual.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas.**

Actividades resueltas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
La suma de dos números consecutivos	$x + (x+1)$
La edad de una niña hace 2 años	$x - 2$
La suma de dos números	$a + b$

El triple de un número

Representaciones algebraicas.

Un número:	X
El doble de un número:	2x = x + x
El opuesto de un número:	-x
El inverso de un número:	$\frac{1}{x}$
El Anterior de un número:	x - 1
El Posterior de un número:	x + 1
Cuadrado de un número:	$x^2 = x \cdot x$

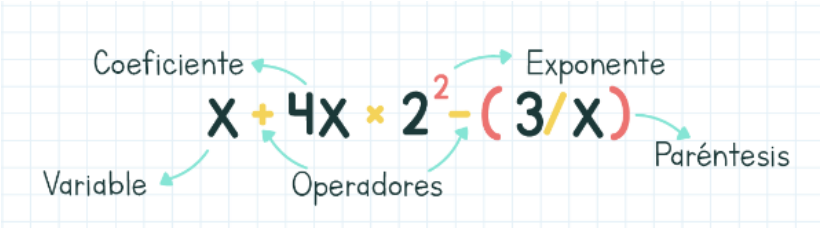
¿ POR QUÉ ES IMPORTANTE EL ÁLGEBRA?.

El álgebra se ocupa de trabajar con valores desconocidos, ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Es la segunda àrea básica de las matemáticas y el segundo de los dos grandes pilares o cimientos en los que se aposenta todo el saber matemático. Su domínio es también inexcusable, o de lo contrário no se podrá avanzar en el conocimiento del resto de las áreas.

Incluye algunos símbolos que son comunes en álgebra, pero no en matemáticas básicas. La forma en que se escriben estas expresiones se llama ***notación algebraica****.*

Esta notación incluye cinco componentes principales:

a) ***variables*** *o* ***incógnitas****,*
b) ***coeficientes****,*
c) ***operadores****,*
d) ***exponentes*** *y*
e) ***paréntesis****.*



RAMON FERRER I MARI

Veamos qué es cada cosa:

***Variables** o **incógnitas**:*

*La **diferencia** entre **una variable y una incógnita** es que la **variable** es aquella que **pertenece a una expresión algebraica** y la **incógnita** es aquella que **pertenece a una ecuación**. Por lo tanto, la incógnita tendrá un respectivo valor numérico y la variable no siempre tendrá un valor numérico.*

Una variable o incógnita es una letra que se usa para representar un número. Por ejemplo, en la siguiente expresión

$$X+2=5$$

la variable X representa un número desconocido que al sumarle 2, nos dará 5.

Expresado como una pregunta sería: ¿a qué número puedes agregarle 2 para que dé 5?

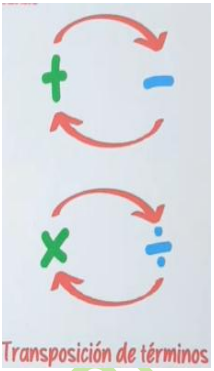
Escribimos X porque, inicialmente, no sabemos cuál será ese número, pero lo podemos averiguar. Como sabemos que 2+3=5, nuestra variable debe ser 3 o, en otras palabras, X=3.

Técnicamente lo resolveríamos así:

En X+2=5, pasamos el 2 al otro lado y nos queda X=5-2, con lo que obtenemos como resultado que X=3.

RAMON FERRER I MARÍ

RECUERDA: Cada vez que desplazamos un término al otro lado del igual (=), toca cambiar el operador por su inverso. En cristiano: Si estaba sumando, lo pasaremos restando, y si estaba multiplicando, lo pasaremos dividiendo, o viceversa.



Coeficientes: *Que son un factor multiplicativo, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica. Por ejemplo, 3X = X + X + X, donde 3 es* ***coeficiente*** *de la variable X.*

Operadores*: Son los símbolos que nos indican la operación que debemos realizar. En estos apuntes, haremos servir los siguientes signos:*

- *Signo de Sumar* **+**
- *Signo de Restar* **–**
- *Signo de Multiplicación* ***** *(No usamos el signo x, para no confundirnos con la variable o incógnita, que la representamos como X)*
- *Signo de División* **/**

RAMON FERRER MARI

Exponentes: *Que indica cuantas veces debemos multiplicar un número por sí mismo. Por ejemplo* 2^3 *está compuesto por el número 2, y el exponente 3 lo que significa que multiplicamos 2 por sí mismo, tres veces, o sea: 2 * 2 * 2 = 8. Si no aparece ningún exponente se sobreentiende que su valor es 1.*

Y podemos añadir que cualquier número (excepto el infinito y el 0) elevado a 0 es 1. Por ejemplo:

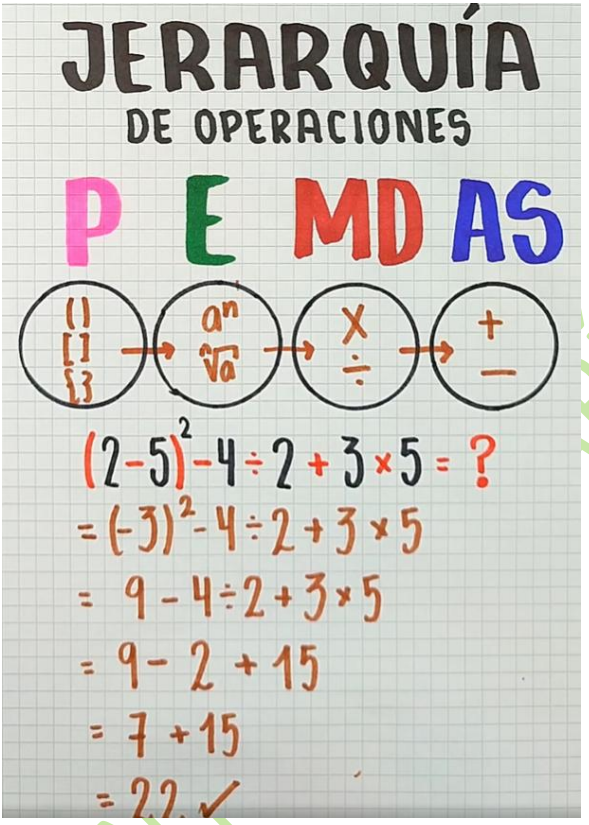
$12^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $4{,}56^0 = 1$

Paréntesis*: Que se usan para agrupar partes de una expresión algebraica. En un problema debes resolver primero las expresiones que están dentro de ellos y acto seguido el resto. Ello significa que hay unas reglas que debes recordar y respetar escrupulosamente.*

El orden de prioridad en la resolución *es el siguiente y lo puedes recordar, acordánte de la palabra* ***PEMDAS (P****ere* ***E****xplica* ***M****atemáticas a* ***D****iana,* ***A****miga de* ***S****andra):*

1. ***P****aréntesis. (….)*
2. **E***xponentes.* 3^2
3. ***M****ultiplicaciones y* ***D****ivisiones. * /*
4. ***A****diciones (=Sumas) y* ***S****ustracciones (=restas). + -*

RAMON FERRER I MARÍ



Veamos este ejemplo:

$$50 / 5*2 + (6+3*2) + 64/4^2 - 10$$

Antes que nada, no te asustes al ver este ejercicio de cálculo. Le pasa como a mí, que soy feo, pero no muerdo.

Respira hondo y sigue el PEMDAS, a rajatabla:

*1º Paréntesis (6+3*2): Dentro del Paréntesis, primero la Multiplicación 3*2 y luego la Suma ---> 3*2 = 6 + 6 = 12 y tras ello nos queda:*

$$50 / 5*2 + 12 + 64/4^2 - 10$$

2º Exponentes 4^2 *-→ 4 * 4= 16 y ahora nos queda:*

$$50 / 5*2 + 12 + 64/16 - 10$$

*3º Multiplicaciones y Divisiones: 5*2=10, luego 50/10 = 5 por un lado, y 64/16=4, por el otro y nos queda:*

$$50 / 10 + 12 + 4 - 10$$

$$5 + 12 + 4 - 10$$

4º Sumas y Restas:

$$5 + 12 + 4 - 10 = \mathbf{11}$$

RAMON FERRER I MARÍ

1.2. Coeficiente y parte literal

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**.

En un monomio la **parte literal** son las letras con sus exponentes, y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo 3:

- En la expresión $4x$, el coeficiente es 4 y la parte literal x. En $7ab$ el coeficiente es 7 y la parte literal ab.

Cuando la expresión es positiva no suele ir precedida del signo +, aunque siempre aparecerá el signo – en las expresiones negativas.

Ejemplo 4:

- Señala el coeficiente y la parte literal en la expresión $-6a$. El coeficiente es –6 y la parte literal a.

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$3a - 5b + c + 6$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: 3a, –5b, c y 6. Los coeficientes son +3, –5, + 1 y +6 respectivamente. Las partes literales son a, b y c. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión $3x + 2$ cuando x vale 5.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 5.
Por tanto: $3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 5.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $4x + 4x$ es equivalente a la expresión $8x$, que es su expresión más simplificada.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo 5:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $3x$ y $2x + 1$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $3x = 2x + 1$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama primer miembro y la que está a la derecha, segundo miembro.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "desconocidas". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo 6:

- $3x - 2 = 2x + 1$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que:
- $2x + y = 5$ o $x - 2 = 3y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

$$2X + Y = 5$$
$$X - 2 = 3Y$$

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo 7:

- $7x - 5 = x + 7$ es una ecuación de primer grado, mientras que $x + 3y^2 = 9$ es una ecuación de segundo grado.

Solución de una ecuación: Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo. Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $3x - 2 = 2x + 1$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $3 \cdot 1 - 2 = +1$, mientras que el valor del segundo miembro es: $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Para $x = 3$, el primer miembro toma el valor: $3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; y el segundo miembro: $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$. Por tanto 3 es una **solución** de la ecuación.

1.2. Coeficiente y parte literal

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**.

En un monomio la **parte literal** son las letras con sus exponentes, y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo 3:

- En la expresión $4x$, el coeficiente es 4 y la parte literal x. En $7ab$ el coeficiente es 7 y la parte literal ab.

Cuando la expresión es positiva no suele ir precedida del signo +, aunque siempre aparecerá el signo – en las expresiones negativas.

Ejemplo 4:

- Señala el coeficiente y la parte literal en la expresión $-6a$. El coeficiente es –6 y la parte literal a.

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$3a - 5b + c + 6$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: 3a, –5b, c y 6. Los coeficientes son +3, –5, + 1 y +6 respectivamente. Las partes literales son a, b y c. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión $3x + 2$ cuando x vale 5.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 5.
Por tanto: $3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 5.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $4x + 4x$ es equivalente a la expresión $8x$, que es su expresión más simplificada.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo 5:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $3x$ y $2x + 1$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $3x = 2x + 1$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama primer miembro y la que está a la derecha, segundo miembro.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "desconocidas". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo 6:

- $3x - 2 = 2x + 1$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que:
- $2x + y = 5$ o $x - 2 = 3y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

$$2X + Y = 5$$
$$X - 2 = 3Y$$

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo 7:

- $7x - 5 = x + 7$ es una ecuación de primer grado, mientras que $x + 3y^2 = 9$ es una ecuación de segundo grado.

Solución de una ecuación: Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo. Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $3x - 2 = 2x + 1$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $3 \cdot 1 - 2 = +1$, mientras que el valor del segundo miembro es: $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Para $x = 3$, el primer miembro toma el valor: $3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; y el segundo miembro: $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$. Por tanto 3 es una **solución** de la ecuación.

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro. Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones equivalentes más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 8:

- $2x - 5 = 11$ es equivalente a $2x = 16$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 8$.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "***números algebraicos***"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, 1/3, 7/5, $\sqrt{2}$, etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 7 = x - 3$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación:

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 7: $3x - x + 7 - 7 = x - x - 3 - 7$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $3x - x = -3 - 7$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -10$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ de donde $x = -5$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -5$.

- Resuelve la ecuación $8 - x = 2x - 4$.

1) Sumamos x y 4 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x:

$$8 - x + x + 4 = 2x + x - 4 + 4,$$

2) Hacemos operaciones: $8 + 4 = 2x + x$

3) Efectuamos las sumas: $12 = 3x$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $4 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 4$.

El procedimiento utilizado en las actividades 10 y 11 es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

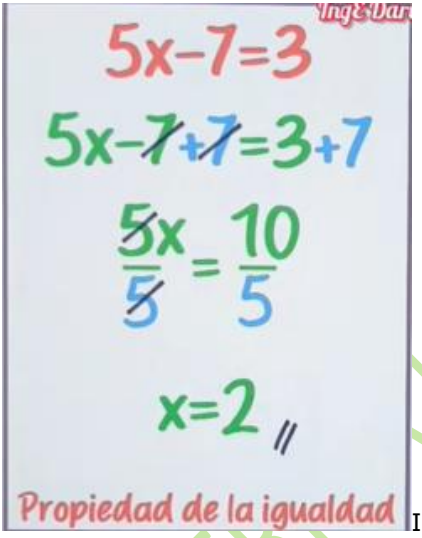
Actividades propuestas

Para resolver las ecuaciones se suelen usar dos métodos:

a) El método de la igualdad, que es el que te han explicado antes y yo te amplío un poco.
b) El método de la transposición de términos.

El método de la igualdad se haría así:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.



IngEDarwin

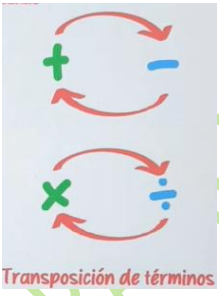
Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

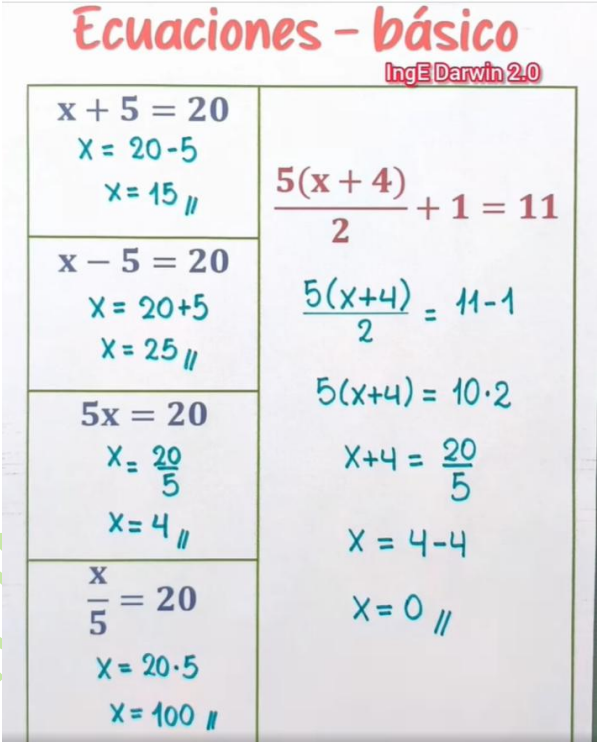
$5x-7=3$ vamos a dejar la x sola, dividiendo entre 5.

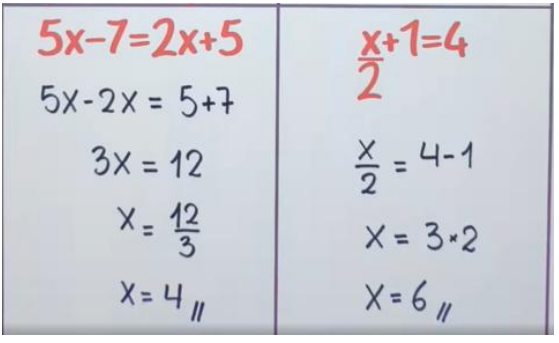
$\frac{5x}{5}-\frac{7}{5}=\frac{3}{5}$ ➡ $\frac{5x}{5}-\frac{7}{5}=\frac{3}{5}$ ➡ $x-\frac{7}{5}=\frac{3}{5}$ ➡ $x=\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{3+7}{5}=\frac{10}{5}=2$

Como podéis ver hemos llegado a la misma solución, por cualquiera de las dos operaciones.

El método de la transposición de términos, implica mover elementos entre ambos lados de la igualdad, con la pretensión de dejar la X sola. No olvidemos que, cuando hagamos la transposición del término que multiplica o divide a la X, **Jamás cambiaremos el signo**. Lo repetiré hasta la extenuación, porque es un fallo muy, pero que muy corriente.







TÉRMINO ALGEBRAICO

El término algebraico es una expresión simple donde se combinan letras y números, y no se suman o restan las variables. Por ejemplo:

$$-5x^3$$

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

La expresión algebraica es un conjunto de variables y números que pueden combinarse con distintas operaciones matemáticas, incluso sumas y restas, a diferencia de los términos algebraicos. Un ejemplo puede ser el siguiente:

$$-5x^3 + 6y$$

Las expresiones pueden expresarse en función al número de términos que las contienen como:

- **Monomio:** Tiene un término: $15z$
- **Binomio:** Posee dos términos: $2x^2 - 7y$
- **Trinomio:** Tiene tres términos: $3x^2 + 8y + 2z$
- **Polinomio:** Cuenta con más de tres términos: $5x^2 - 3y + 6z - 9$

De todos modos los exponentes tienen dos restricciones:

Los exponentes NO pueden ser negativos o diferentes de un numero entero..

RAMON FERRER I MARÍ

Definición de un polinomio

- **Polinomio en una variable:** Una expresión algebraica que solamente contiene términos de la forma ax^k donde **a** es cualquier numero real y k es un entero no negativo.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,

donde $a_n \neq 0$. El polinomio es de grado n, y a a_n se le denomina coeficiente principal. a_0 es el termino constante.

Dr. Edwin Alfonso Sosa 4

No son polinomios

No negativo

- $2x^{-1} + 5$
- $X^3 + 3\, x^{1/2}$ — No es un entero

- No cumplen con las condiciones

Dr. Edwin Alfonso Sosa

RAMÓN MARÍ

OPERACIONES CON POLINOMIOS. LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS.

SUMA DE POLINOMIOS

Se nos pide que procedamos a sumar $x^2 + x - 9$ con $3x^2 - 2x - 6$

Paso 1: Detectar los términos semejantes e ir sumándolos algebraicamente entre ellos.

$$x^2 + 3x^2 = 4x^2 \qquad x - 2x = -x \qquad -9 - 6 = -15$$

Paso 2: colocar los resultados de las operaciones en cada grupo de términos semejantes:

$$4x^2 - x - 15$$

RESTA DE POLINOMIOS

Vamos a usar los mismos polinomios que en la suma: a $x^2 + x - 9$ restar $3x^2 - 2x - 6$

Paso 1: Copiar el primer polinomio: $x^2 + x - 9$

Paso 2: Copiar el segundo polinomio **CAMBIANDOLE LOS SIGNOS**.

$$-3x^2 + 2x + 6$$

RAMON FERRER I MARÍ

Paso 3: Detectar los términos semejantes e ir sumándolos algebraicamente entre ellos.

$x^2 - 3x^2 \qquad x + 2x = 3x \qquad -9 + 6 = -3$
$= -2x^2$

Paso 4: colocar los resultados de las operaciones en cada grupo de términos semejantes:

$$-2x^2 + 3x - 3$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación de 2 polinomios se realiza término a término, teniendo en cuenta que cada término del primer polinomio se multiplica por cada uno de los términos del segundo polinomio.

Supongamos la siguiente multiplicación de dos expresiones similares a polinomios $(a - b)(x + y - z)$.

Cada termino de $(a - b)$ va a ser multiplicado por cada uno de los términos de $(x + y - z)$.

Operando con el primer término a

$a(x + y - z) = ax + ay - az$

Ahora con el segundo término que es $-b$

RAMON FERRER I MARÍ

$-b(x+y-z) = -bx - by + bz$ y juntando ambos resultados

$(a-b)(x+y-z) = ax + ay - az - bx - by + bz$

Ejemplo 1. Binomio por binomio

$(3x+2y)(5x-4y)$

Siguiendo el procedimiento anterior

$3x(5x-4y) + 2y(5x-4y)$

$3x \cdot 5x - 3x \cdot 4y + 2y \cdot 5x - 2y \cdot 4y$

$15x^2 - 12xy + 10xy - 8y^2$

Simplificando los términos semejantes $-12xy + 10xy = -2xy$ queda:

$15x^2 - 2xy - 8y^2$

Ejemplo 2. Binomio por trinomio

$(-2m^2n + 3m)(-5m + 4m^2n + 6)$

De manera similar que en el ejemplo 1 si tomamos como primer polinomio a $(-2m^2n + 3m)$ entonces cada término de este debe ser multiplicado uno a uno con cada termino de $(-5m + 4m^2n + 6)$.

Comenzando con el primer termino $-2m^2n$

$-2m^2n(-5m + 4m^2n + 6)$

RAMON FERRER I MARÍ

Multiplicando término a término

$$(-2m^2n)(-5m) + (-2m^2n)(4m^2n) + (-2m^2n)(6)$$

Ordenando signos, números y variables

$$- \cdot - \cdot 2 \cdot 5 \cdot m^2m \cdot n + \cdot - \cdot 2 \cdot 4 \cdot m^2m^2n \cdot n + \cdot - \cdot 2 \cdot 6 \cdot m^2n$$

Teniendo en cuenta que la multiplicación de signos iguales da positivo y la multiplicación de signos diferentes da negativo y además en la multiplicación de potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes, la expresión queda:

$$10m^3n - 8m^4n^2 - 12m^2n$$

Ahora con el segundo término

$$3m(-5m + 4m^2n + 6)$$

$$(3m)(-5m) + (3m)(4m^2n) + (3m)(6)$$

$$-15m^2 + 12m^3n + 18m$$

Sumando ambos resultados

$$10m^3n - 8m^4n^2 - 12m^2n - 15m^2 + 12m^3n + 18m$$

Se observa que solo hay un término que se repite y se pueden agrupar algebraicamente, esos términos son:

RAMON FERRER I MARÍ

$$10m^3n + 12m^3n = 22m^3n$$

El resultado final se obtiene ordenando

$$-8m^4n^2 + 22m^3n - 12m^2n - 15m^2 + 18m$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Sabemos que la división aritmética se compone de un dividendo, un divisor, un cociente y el resto. Es la división que se opera de forma más larga realizando restas al dividendo con el resultado de la multiplicación de un término del cociente por el divisor.

Dividendo (D)	Divisor (d)
Resto (R)	Cociente (C)

De igual manera se puede operar en la división de polinomios siguiendo un procedimiento que se describe a continuación.

1. Ordenar cada polinomio según el grado de mayor a menor y si falta algún exponente intermedio completar con ceros.
2. Buscar un número o expresión (parte del cociente) que multiplicado por el divisor (polinomio de menor grado) se aproxime a las

RAMON FERRER I MARÍ

primeras cifras o a los términos de mayor grado del dividendo (polinomio de mayor grado).

3. Al resultado del paso 1 se le cambia el signo y se coloca bajo el dividendo según corresponda.
4. Realizar la suma algebraica de parte del dividendo con el resultado generado en el paso 3.
5. Se baja el siguiente término o cifra del dividendo al lado del resultado del paso 4.
6. Repetir el procedimiento desde el paso 2.
7. Si no se cumple el paso 5 quiere decir que no existen más términos en el dividendo y la división finaliza siendo el resultado:

$$\frac{D}{d} = \frac{R}{d} + C$$

Apliquemos los pasos dividiendo 2556/12. Como es división de números se omite el paso 1.

$$\begin{array}{rcccc|cc}
 & 2 & 5 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ \cline{7-7}
- & 2 & 4 & & & 2 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 1 & 5 & & &
\end{array}$$

El paso 2 ha sido buscar un número que multiplicado por 12 se aproxime a 25, en este caso el número es 2 que multiplicado por 12 da 24.

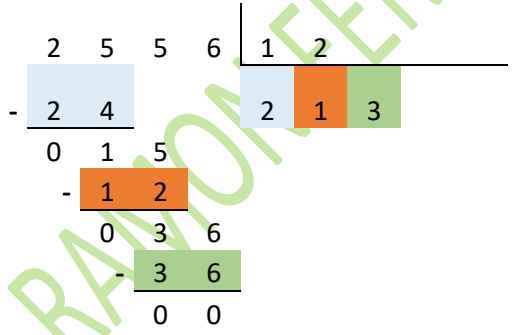
El paso 3 nos dice que al resultado del paso 1 se le cambie el signo y se coloque debajo del dividendo en la posición adecuada. En este caso -24 se ha colocado debajo del 25

RAMON FERRER I MARÍ

El paso 4 indica que se realice una suma algebraica, entonces procedemos realizando la operación 25 – 24 que da 01.

El paso 5 amerita que se baje el siguiente número del dividendo que es 5 y se coloque al lado del resultado del paso anterior, lo cual genera un resto inicial de 015.

El paso 6 aconseja revisar si aún existen términos por utilizar en el dividendo y en caso de que sea cierto repetir nuevamente todos los pasos desde el inicio. El resultado aquí se presenta obteniendo un valor de 213 en el cociente y de cero, en el resto, lo que quiere decir que la división es exacta.



Un ejemplo ilustrativo con la siguiente división de polinomios

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x - 5}$$

RAMON FERRERI MARÍ

Paso 1. Tanto el polinomio del numerador como el polinomio del denominador están ordenados en función del mayor exponente, sin embargo, se observa en el numerador que falta el termino de grado o exponente 2 el cual se completa con cero.

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \Big| \; x - 5$$

Paso 2. En primer lugar, se busca una expresión que multiplicada por x en el cociente de como resultado $5x^3$, esta expresión es $5x^2$ que al multiplicarse por $x-5$ es:

$$5x^2(x-5) = 5x^3 - 25x^2$$

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \Big| \; x - 5$$

$$5x^2$$

Paso 3. El resultado del paso 2 se cambia de signo y se coloca debajo del dividendo en el lugar correspondiente.

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \Big| \; x - 5$$

$$-5x^3 + 25x^2 \qquad\qquad 5x^2$$

RAMON FERRER I MARÍ

Paso 4. Se suma algebraicamente parte del dividendo y el resto

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 5x^3 & + & 0x^2 & - & 3x & + & 1 & x - 5 \\ \hline -\ 5x^3 & + & 25x^2 & & & & & 5x^2 \\ \hline 0 & + & 25x^2 & & & & & \end{array}$$

Paso 5. Se baja el siguiente termino para que forme parte del resto.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 5x^3 & + & 0x^2 & - & 3x & + & 1 & x - 5 \\ \hline -\ 5x^3 & + & 25x^2 & & & & & 5x^2 \\ \hline 0 & + & 25x^2 & - & 3x & & & \end{array}$$

Paso 6. Repitiendo los pasos anteriores hasta operar con todos los términos del dividendo se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 5x^3 & + & 0x^2 & - & 3x & + & 1 & x - 5 \\ \hline -\ 5x^3 & + & 25x^2 & & & & & 5x^2 + 25x + 122 \\ \hline 0 & + & 25x^2 & - & 3x & & & \\ & - & 25x^2 & + & 125x & & & \\ \hline & & 0 & + & 122x & + & 1 & \\ & & & - & 122x & + & 610 & \\ \hline & & & & 0 & + & 611 & \end{array}$$

Paso 7. La división de los polinomios se puede escribir como:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x - 5} = \frac{611}{x - 5} + 5x^2 + 25x + 122$$

RAMON FERRER I MARÍ

La división de polinomios es de gran ayuda en el cálculo de integrales de fracciones con polinomios siempre y cuando el grado del numerador sea mayor que el grado del denominador.

Veamos 2 ejemplos de divisiones exactas

Ejemplo 1. $(2x + 3x^2 - 8) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} & 3x^2 & + & 2x & - & 8 & x & + & 2 \\ \hline - & 3x^2 & - & 6x & & & 3x & - & 4 \\ \hline & 0 & - & 4x & - & 8 & & & \\ & & + & 4x & + & 8 & & & \\ \hline & & & & & 0 & & & \end{array}$$

En este ejemplo se ordenó el polinomio dividendo de acuerdo al exponente de mayor a menor.

$2x + 3x^2 - 8 = 3x^2 + 2x - 8$

Los términos escogidos para la multiplicación en cada repetición de los 7 pasos son:

Término	Multiplicación	Resultado	Cambio de signo
$3x$	$3x(x + 2)$	$3x^2 + 6x$	$-3x^2 - 6x$
-4	$-4(x + 2)$	$-4x - 8$	$+4x + 8$

El resultado de la división exacta es $3x - 4$

Ejemplo 2. $(6x^2 - 2y^2 - xy) \div (y + 2x)$

RAMON FERRER I MARÍ

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} 6x^2 & - & xy & - & 2y^2 & & 2x & + & y \\ \cline{7-9} -\ 6x^2 & - & 3xy & & & & 3x & - & 2y \\ \cline{1-3} 0 & - & 4xy & - & 2y^2 & & & & \\ & + & 4xy & + & 2y^2 & & & & \\ \cline{2-5} & & 0 & & & & & & \end{array}$$

En este ejemplo tenemos polinomios con diferentes variables. Se han ordenado los polinomios comenzando con la variable x desde su grado mayor hasta el menor y luego se ha ordenado la variable y.

$6x^2 - 2y^2 - xy = 6x^2 - xy - 2y^2$

$y + 2x = 2x + y$

Los términos escogidos para la multiplicación en cada repetición de los 7 pasos son:

Término	Multiplicación	Resultado	Cambio de signo
$3x$	$3x(2x + y)$	$6x^2 + 3xy$	$-6x^2$ $-\ 3xy$
$-2y$	$-2y(2x + y)$	$-4xy - 2y^2$	$+4xy$ $+\ 2y^2$

Ejemplo 3. División de polinomios con exponentes no consecutivos

Un polinomio puede tener exponentes no consecutivos. Para dividir es aconsejable dejar espacios en blanco o completar con ceros en aquellos términos correspondientes a los exponentes faltantes.

RAMON FERRER I MARI

Sea $1 - a - a^5 - 3a^2 \div 1 + 2a + a^2$ una división de polinomios donde se observa que los exponentes del polinomio dividendo no son consecutivos, faltando los términos de grado 4 y 3.

Siguiendo a detalle los 7 pasos descritos en esta sección la división que obtenemos es:

$$
\begin{array}{rl|l}
-a^5 + 0a^4 + 0a^3 - 3a^2 - a + 1 & & a^2 + 2a + 1 \\
\cline{3-3}
+a^5 + 2a^4 + a^3 & & -a^3 + 2a^2 - 3a + 1 \\
\cline{1-1}
0 + 2a^4 + a^3 - 3a^2 & & \\
-2a^4 - 4a^3 - 2a^2 & & \\
\cline{1-1}
0 - 3a^3 - 5a^2 - a & & \\
+3a^3 + 6a^2 + 3a & & \\
\cline{1-1}
0 + a^2 + 2a + 1 & & \\
-a^2 - 2a - 1 & & \\
\cline{1-1}
0 & &
\end{array}
$$

En resumen, los términos de los polinomios se ordenan de mayor a menor grado y a la vez se completan con ceros los términos faltantes.

$1 - a - a^5 - 3a^2 = -a^5 + 0a^2 + 0a^3 - 3a^2 - a + 1$

$1 + 2a + a^2 = a^2 + 2a + 1$

Los términos correctos para la multiplicación con el divisor en cada repetición de los 7 pasos son:

Término	Multiplicación	Resultado	Cambio de signo
$-a^3$	$-a^3(a^2+2a+1)$	$-a^5-2a^4-a$	a^5+2a^4+a
$2a^2$	$2a^2(a^2+2a+1)$	$2a^4+4a^3+2a^2$	$-2a^4-4a^3-2a^2$
$-3a$	$-3a(a^2+2a+1)$	$-3a^3-6a^2-3a$	$3a^3+6a^2+3a$
1	a^2+2a+1	a^2+2a+1	$-a^2-2a-1$

Ejemplo 4. División de polinomios con términos variados

Un polinomio también puede tener términos variados, es decir, con diferentes combinaciones de letras. En este caso los polinomios deben ser ordenados por la letra o variable de mayor grado hasta su grado menor. Una vez terminado el orden de la primera variable proceder de igual manera con las restantes.

Sea $12a^3+33ab^2-35a^2b-10b^3 \div 4a-5b$ una división de polinomios donde se observan dos variables. Como ya sabemos conviene siempre el primer paso que indica ordenar términos de acuerdo al grado de los exponentes de mayor a menor.

RAMON FERRER I MARÍ

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & 12a^3 & -\ 35a^2b & +\ 33ab^2 & -\ 10b^3 & & & 4a - 5b \\
\cline{8-8}
- & 12a^3 & +\ 15a^2b & & & & & 3a^2 - 5ab + 2b^2 \\
\cline{1-3}
 & 0 & -\ 20a^2b & +\ 33ab^2 & & & & \\
 & & +\ 20a^2b & -\ 25ab^2 & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & +\ 8ab^2 & -\ 10b^3 & & & \\
 & & & -\ 8ab^2 & +\ 10b^3 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Una manera de dar el resultado de la división es:

$$\frac{12a^3 + 33ab^2 - 35a^2b - 10b^3}{4a - 5b} = 3a^2 - 5ab + 2b^2$$

Ejemplo 5.

$$32n^2 - 54m^2 + 12m \cdot n \div 8n - 9m$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & 54m^2 & +\ 12m \cdot n & +\ 32n^2 & & -9m + 8n \\
\cline{6-6}
+ & 54m^2 & -\ 48m \cdot n & & & 6m + 4n + 2b^2 \\
\cline{1-3}
 & 0 & -\ 36m \cdot n & +\ 32n^2 & & \\
 & & +\ 36m \cdot n & -\ 32n^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

RAMON FERRER I MARÍ

3.1 Regla de Ruffini

Es un método que sirve para hallar los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división de un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x + a$.

Un detalle básico: si la forma que nos dan es x – a, a la hora de aplicar la regla de Ruffini, lo cambiamos de signo, ya esta regla exige que el número sea siempre positivo. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Explicación del método mediante un ejemplo:

Consideramos los polinomios $P(x) = -3x + 2x^4 + x^2 + 5$ y $Q(x) = x - 2$.

Hallaremos el cociente y el resto de la división $P(x) : Q(x)$

Primero: Escribimos $P(x)$ en orden decreciente, es decir, $P(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 5$. Con este orden los coeficientes son: 2,0,1,-3,5.

	2	0	1	-3	5
2					

Hemos colocado a la izquierda el término independiente de $Q(x)$ cambiado de signo.

Segundo: Bajamos el primer coeficiente de $P(x)$

	2	0	1	-3	5
2					
	2				

Tercero: Multiplicamos el término independiente de $Q(x)$ por el número que hemos bajado y colocamos el resultado debajo del segundo coeficiente de $P(x)$ y sumanos.

	2	0	1	-3	5
2		4			
	2	4			

Cuarto: Multiplicamos el término independiente de $Q(x)$ por el último número que tenemos en la parte inferior y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente de $P(x)$ y sumamos.

	2	0	1	-3	5
2		4	8		
	2	4	9		

Volvemos a repetir este paso hasta que ya no queden coeficientes de $P(x)$.

	2	0	1	-3	5
2		4	8	18	30
	2	4	9	15	35

Los números que nos aparecen en la última fila excepto el último son los coeficientes del polinomio cociente $C(x)$ en orden decreciente y el último número es el resto de la división.

Es decir:

$$C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 9x + 15$$

$$R = 35$$

Comprobación:

Tenemos que comprobar que se verifica la igualdad:

$$Dividendo = divisor \cdot cociente + resto$$

En efecto, $2x^4 + x^2 - 3x + 5 = (x - 2) \cdot (2x^3 + 4x^2 + 9x + 15) + 35.$

4. Identidades notables.

Una ***identidad*** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor que tengan las variables.

En esta unidad didáctica estudiamos tres identidades: El cuadrado de la suma, el cuadrado de la diferencia y suma por diferencia.

Cuadrado de la suma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x+5)^2$

Solución: $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

Cuadrado de la diferencia:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x-5)^2$

Solución: $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Suma por diferencia:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x+5) \cdot (2x-5)$

Solución. $(2x+5) \cdot (2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

RAMO

5. Operaciones combinadas con polinomios.

Ejemplo:

Calcula: $3x\cdot(-3x+7)+3\cdot(2x-3)^2-4\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Potencias	→	$3x\cdot(-3x+7)+3\cdot(4x^2-12x+9)-4\cdot(x-1)\cdot(x+1)$
Productos	→	$-9x^2+21x+12x^2-36x+27-4\cdot(x^2-1)$ $-9x^2+21x+12x^2-36x+27-4x^2+4$
Sumas/restas	→	$-x^2-15x+31$

6. Traduce al lenguaje algebraico.

Traducir al lenguaje algebraico significa expresar con variables, números y operaciones el lenguaje natural.

Ejemplos:

Cuatro menos un número: $4-x$

El cuádruplo de un número: $4x$

La cuarta parte de un número: $\frac{x}{4}$

Dos números se diferencian en 4 unidades: $x-y=4$

El quíntuplo de un número divido entre 3: $5x:3$

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Una ecuación es la asociación entre dos expresiones algebraicas a través del signo de igualdad. Pueden ser principalmente de dos tipos:

1. **Ecuación de primer grado:** Cuando la variable está elevada máximo a la potencia 1. Se le conoce como ecuación.

$$5x + 5 = 9 - 3x$$

- **Ecuación de segundo grado:** Cuando el exponente máximo de la variable es 2. También se le denomina ecuación cuadrática.

$$3x^2 - 3x = x - 1$$

RER MARÍ

3. Resolución de ecuaciones de primer grado

La solución de la ecuación

$$ax + b = 0$$

es

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación $5x + 15 = 0$ es $x = -3$.

Si la resolvemos por transposición de términos sería:

5x + 15 = 0 ⟹ 5x = -15 ⇨ x=$\frac{-15}{5}$ ⟹ x =-3

Y si recurrimos a la Igualación lo haríamos así

$5x + 15 = 0 \Rightarrow \frac{5x}{5} + \frac{15}{5} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{5} + \frac{15}{5} = 0$

$x + 3 = 0 \Rightarrow$ x = -3

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

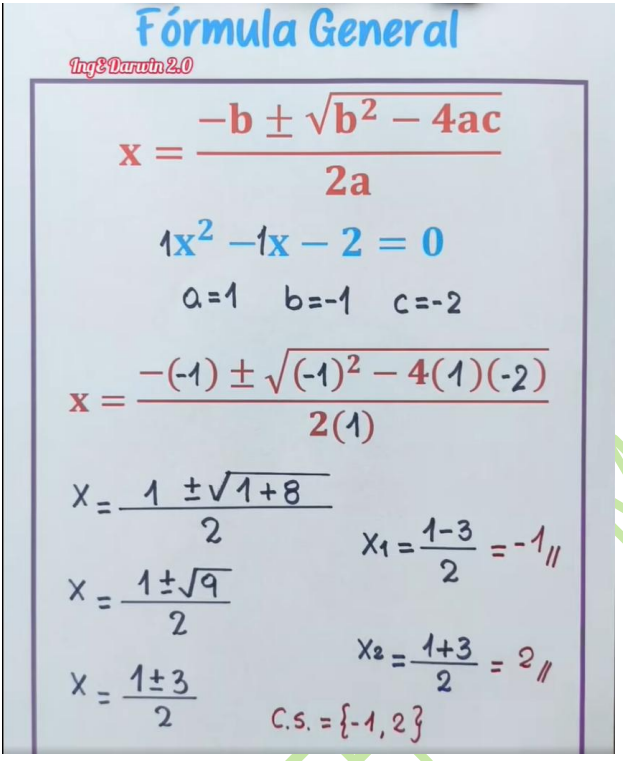
Una **ecuación de segundo grado**[1] [2] o **ecuación cuadrática de una variable** es aquella que tiene la expresión general:

Ecuación de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad a \neq 0$

En cristiano: una ecuación en la que el grado más alto de la x está elevado al cuadrado.

Se resuelven aplicando la llamada fórmula de Bashkara (por el matemático Indio que la descubrió) y da dos soluciones, que aquí identifican como x_1 y x_2



IngEDarwin

Otro ejemplo, con una solución en forma de fracción:

2 $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Para este caso observemos que:

$a=2,\ b=-7,\ c=3$

Aplicamos la formula

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 7.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 7.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 7.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora si, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 7$

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 - 1 = 7 - 1$, luego $x + x = 7 - 1$. Opera: $2x = 6$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 6/2$, por tanto, $x=3$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $3 + 4 = 7$.

3.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 - x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 - x) = 54.$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 - 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x, resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 - 2x - 68 = 54 - 68.$$

Opera:

$$-x = -14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por -1:

$$x = -14/-1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay $34 - 14 = 20$ habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2 \cdot 20 = 54.$$

- En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 - x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 - x)$ patas.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por –2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues 50 – x = 50 – 40 = 10.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

3.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x - 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x - 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, 10 + 20 + 25 = 55, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitan 2 cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 - 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 - 2 = x + 5$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación: $2x + 3 - 2 - x - 3 + 2 = x - x - 3 + 2 + 5$; $2x - x = 4$; $x = 4$

Solución: x = 4 cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, si a la altura le sumamos 5, queda 4 + 5 = 9, y si a la base le restamos 2, queda 11 – 2 = 9, con lo que se obtiene un cuadrado.

3.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, 21 – x, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: $5 \cdot x + 10 (21 - x) = 170$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: $5x + 210 - 10x = 170$

Deja en el primer miembro todos los términos con *x*, y en el segundo los que no tienen *x*: $5x - 10x + 210 - 210 = -210 + 170$

Haz operaciones: $-5x = -40$

Despeja la incógnita: $x = (-40) : (-5) = +8$

Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y $21 - 8 = 13$ es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que $8 \cdot 5 = 40$ € y $13 \cdot 10 = 130$ €. Y que, en efecto, $40 + 130 = 70$ €.

Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.

RAMON

Saber traducir el enunciado de un problema a una o varias ecuaciones que nos permitan resolverlo es de capital importancia, por eso insisto tanto.

¿Cómo se resuelven los problemas de ecuaciones?

Antes de ver algunos ejemplos de problemas de ecuaciones, vamos a repasar qué es una ecuación. Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras, que se llaman incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Son una herramienta valiosa en matemáticas y en muchas áreas de la vida cotidiana. En el colegio nos enseñan algunas de las ecuaciones más importantes para la historia de la ciencia que se aplican en física y matemáticas.

Con frecuencia nos enfrentamos a situaciones que podemos representar escribiendo una ecuación. Los problemas de ecuaciones de primer grado sirven para representar situaciones en las que hay una cantidad desconocida que está relacionada con otras cantidades conocidas mediante una operación matemática. Al resolver una ecuación de primer grado se puede encontrar el valor de una cantidad desconocida.

Los problemas de ecuaciones se pueden ver como adivinanzas matemáticas. Te permiten resolver problemas y descubrir el valor de una cantidad desconocida.

RAMON FERRER I MARÍ

Índice

- ¿Cómo resolver problemas de ecuaciones?
- Ejemplos de problemas de ecuaciones en Smartick
    - Encontrar el valor de un número
    - Dividir un total en partes iguales
    - Problemas de ecuaciones relacionados con edades
    - Problemas de ecuaciones relacionados con precios
    - Repartir una cantidad entre varias personas
    - Contextos geométricos

¿Cómo resolver problemas de ecuaciones?

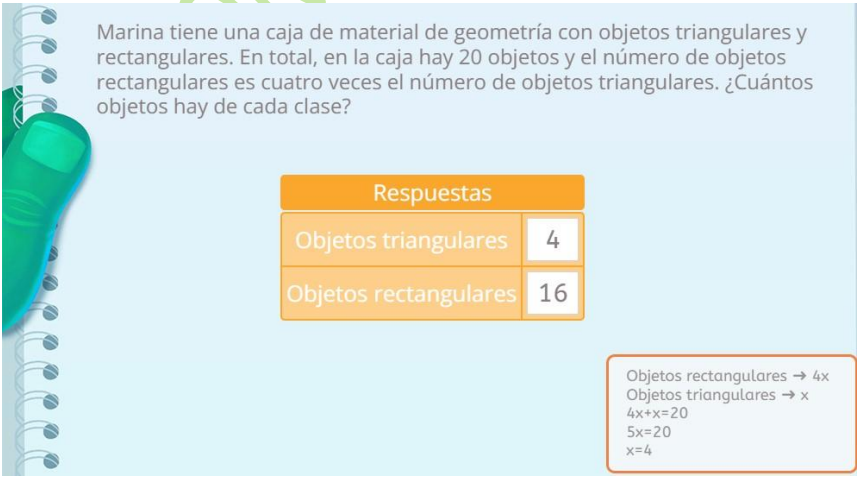
A continuación, puedes ver los pasos que hay que seguir a la hora de resolver un problema de ecuaciones:

1. **Leer el problema despacio**. Normalmente, la primera vez que leemos un problema nos quedamos con muy poca información, así que, es bueno leerlo varias veces.
2. **Escribir los datos** que te da el problema y lo que te pregunta.

RAMON FERRER I MARÍ

3. **Asignar una incógnita** a lo que te están pidiendo.
4. **Escribir la ecuación** que resuelve el problema. Hay que asegurarse de comprender lo que nos pregunta el problema.
5. **Resolver la ecuación**. Recuerda que si la ecuación se puede simplificar, resolver la ecuación te resultará más fácil. Es muy importante saber resolver bien las ecuaciones de primer grado antes de pasar a resolver problemas de ecuaciones. Hay que dominar la resolución de ecuaciones reducibles.
6. **Comprobar la respuesta**. No podemos olvidarnos de analizar si la solución que hemos encontrado tiene sentido y si responde a lo que nos han preguntado en el problema.

Encontrar el valor de un número



En este ejemplo hay que encontrar el valor del número de objetos triangulares y el valor del número de objetos rectangulares que tiene Marina dentro de una caja.

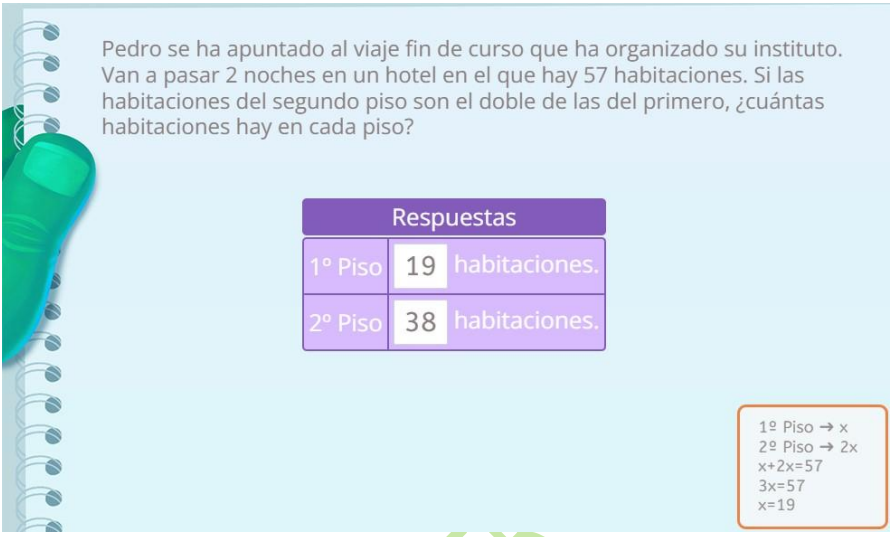
Los datos del problema son:

- En la caja hay 20 objetos.
- El valor de los objetos rectangulares es cuatro veces el número de los objetos triangulares:
    - Objetos triangulares → **x**
    - Objetos rectangulares → **4x**
- Nos piden: ¿Cuántos objetos hay de cada clase?

La ecuación de primer grado que resuelve este problema de ecuaciones es: **4x+x=20.** El valor de **x** es 4. Por lo tanto, el número de cada tipo de objeto es 4 objetos triangulares y 16 objetos rectangulares.

RAMON FERRER I MARÍ

Dividir un total en partes iguales



En este problema de ecuaciones hay que averiguar cuántas habitaciones hay en cada piso.

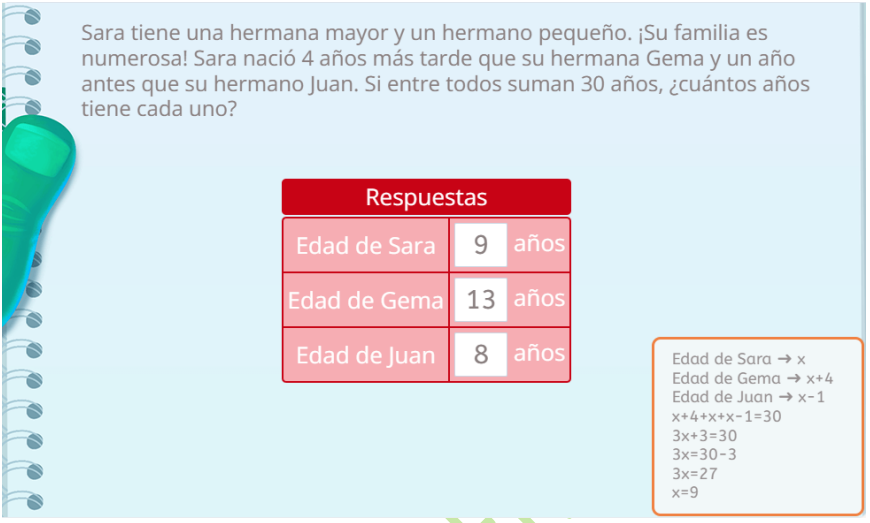
Los datos del problema son:

- En el hotel hay 57 habitaciones:
  - Habitaciones del primer piso → **x**
  - Habitaciones del segundo piso → **2x**
- Nos piden: ¿Cuántas habitaciones hay en cada piso?

La ecuación de primer grado que resuelve este problema de ecuaciones es: **x+2x=57**. El valor de **x** es 19. Por lo tanto, en el primer piso hay 19 habitaciones y en el segundo piso hay 38 habitaciones.

RAMON FERRER

Problemas de ecuaciones relacionados con edades



En este caso hay que encontrar el valor de la edad de Sara, Gema y Juan.

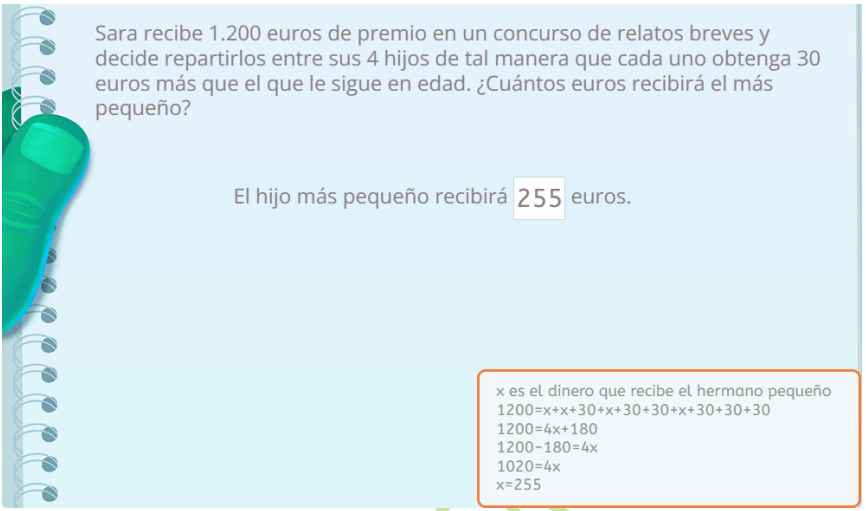
Los datos del problema son:

- Sara nació 4 años más tarde que su hermana Gema y un año antes que su hermano Juan:
  - Edad de Sara → **x**
  - Edad de Gema → **x+4**
  - Edad de Juan → **x-1**
- Nos piden: ¿Cuántos años tiene cada uno?

La ecuación de primer grado que resuelve este problema de ecuaciones es: **x+4+x+x-1=30.** El valor de **x** es 9. Por lo tanto, Sara tiene 9 años, Gema 13 años y Juan 8 años.

RAMON FERRE

Problemas de ecuaciones relacionados con precios



Hay que encontrar la cantidad de dinero que recibirá el hijo más pequeño.

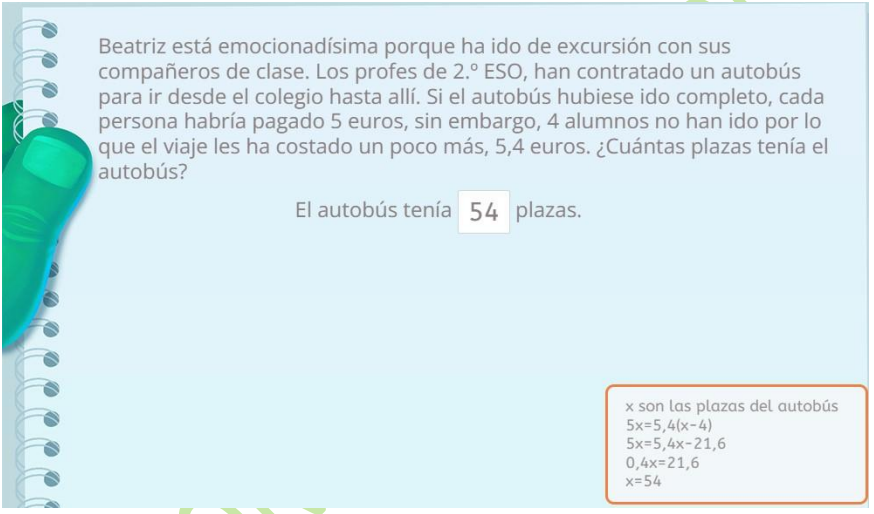
Los datos del problema son:

- Sara ha recibido 1.200€.
- Decide repartirlo entre sus 4 hijos de esta forma:
  - Primer hijo → **x+30+30+30**
  - Segundo hijo → **x+30+30**
  - Tercer hijo → **x+30**
  - Cuarto hijo (el más pequeño) → **x**
- Nos piden: ¿Cuántos euros recibirá el hijo más pequeño?

RAMON FERRER

La ecuación de primer grado que resuelve este problema de ecuaciones es: **1200=x+x+30+x+30+30+x+30+30+30**. El valor de **x** es 255. Por lo tanto, el hijo más pequeño recibirá 255€.

Repartir una cantidad entre varias personas



Tenemos que encontrar el número de plazas que tenía el autobús en el que ha ido Beatriz con sus compañeros de clase de excursión.

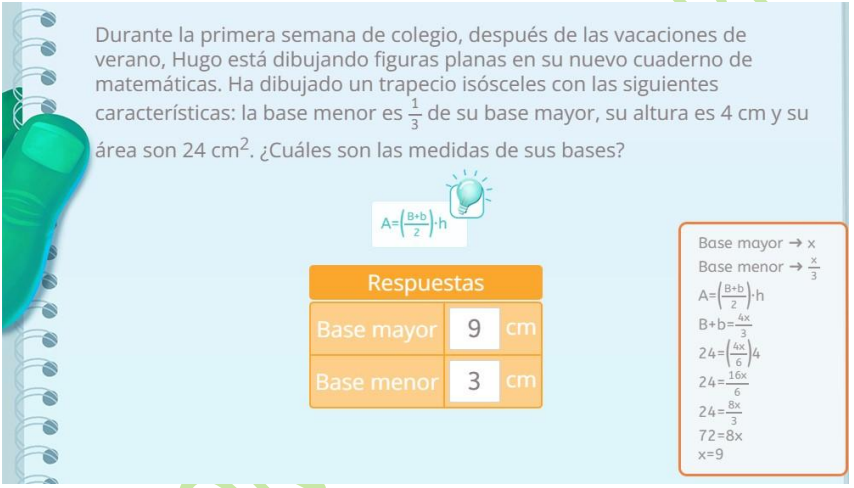
Los datos del problema son:

- Si hubiesen ido todos los alumnos de la clase, cada uno hubiese pagado 5€.
- Han faltado 4 alumnos por lo que, cada uno, ha tenido que pagar 5,4€.
- Nos piden: ¿Cuántos plazas tenía el autobús?

- Número de plazas del autobús → **x**

La ecuación de primer grado que resuelve este problema de ecuaciones es: **5x=5,4(x-4).** El valor de **x** es 54. Por lo tanto, el autobús tenía 54 plazas.

Contextos geométricos



En este último problema de ecuaciones hay que encontrar las medidas de las bases del trapecio isósceles que ha dibujado Hugo en su cuaderno.

Los datos del problema son:

- Hugo ha dibujado un trapecio isósceles con las siguientes características:
  - Medida de la base mayor → **x**
  - Medida de la base menor → **$^{x}/_{3}$**

- Nos piden: ¿Cuáles son las dimensiones de cada una de las bases?

Para este problema hay que saberse la fórmula del área de un trapecio. La ecuación para resolver el problema de ecuaciones es **$24=(^{4x}/_{6})\cdot 4$** . El valor de **x** es 9. Entonces, la base mayor mide 9 cm y la base menor 3 cm.

https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/problemas-de-ecuaciones/

RAMON FERRER I MARÍ

RESUMEN

Lenguaje algebraico	Utiliza letras y números para representar una información.	Área de un rectángulo = base por altura: A = b * a.
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números.	$x + 3x$.
Monomio o término algebraico	Consta de coeficiente y parte literal. Van separados por los signos +, –, =.	$5x^2$.
Coeficiente	Número que multiplica a la parte literal de un monomio	El coeficiente de $5x^2$ es 5.
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$.
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verdadera para ciertos valores de las incógnitas.	$3x - 1 = 2x + 5$, verdadera para $x = 6$
Miembros de una ecuación	Cada una de las dos expresiones algebraicas que forman la ecuación. Van separados por el signo =.	En la ecuación anterior $3x - 1$ es el primer miembro, y $2x + 5$ es el segundo miembro.
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación.	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	La solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$3x - 1 = 2x + 5$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$ $x = 6$.
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones.	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$.
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis. Quitar denominadores. Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar. Despejar la x.	$(3x - 1) = 7/2$. 1. $6x - 2 = 7/2$. 2. $12x - 4 = 7$. 3. $12x = 7 + 4$. 4. $12x = 11$. 5. $x = 11/12$.
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7. da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado. 2) $x + 7 = 2x - 3$. 3) $x - 2x = -3 - 7; -x = -10; x = 10$. 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$.

Faltaría el paso 5) 17 = 17 con lo que la solución es correcta.

SISTEMAS DE ECUACIONES.

Unidad didáctica 5: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Donde a, b, a' y b' son números reales que se denominan **coeficientes** y c y c' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 2x+5y=7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x+2y=7 \\ x-y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+2y=3 \\ 7x-3y=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y+2=3x \\ 7x-3=5y \end{cases}$$

Ejemplo:

No es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy+5y=7 \\ 4x-8xy=9 \end{cases}$ porque tiene términos en xy.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2+5y=7 \\ 4x-8y=9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

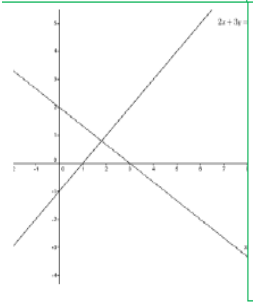
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**



Compatible determinado	Compatible indeterminado	Incompatible
Rectas secantes	Rectas coincidentes	Rectas paralelas

Actividades resueltas

- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

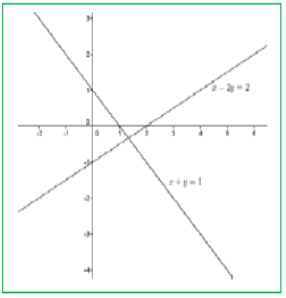
  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

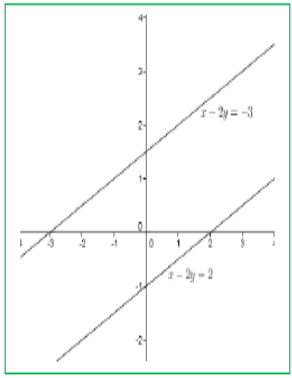
  c) Compatible indeterminado

Solución:

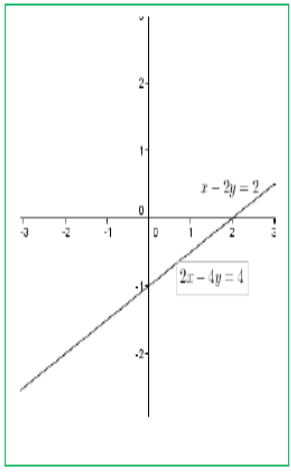
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.



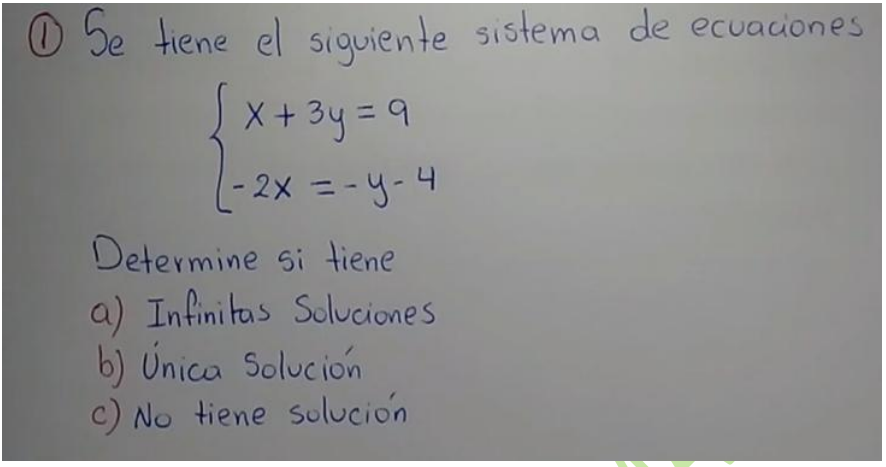
b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



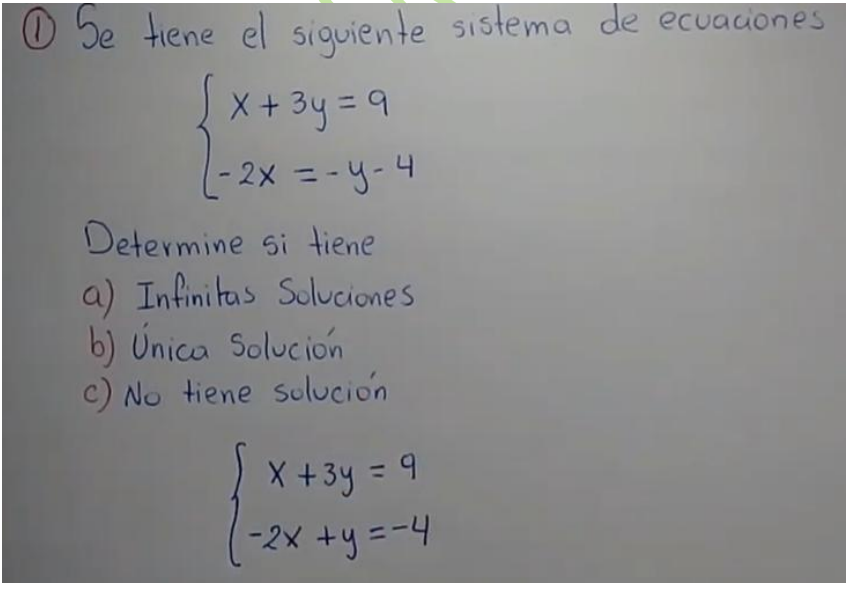
c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



TRUCO RÁPIDO PARA DETERMINAR SI UN SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE DETERMINADO.



Primer paso: "Cada oveja, con su pareja" ordenar la ecuación, es decir, poner todas las X juntas, todas las Y juntas y lo mismo con los números, que se llaman términos independientes.

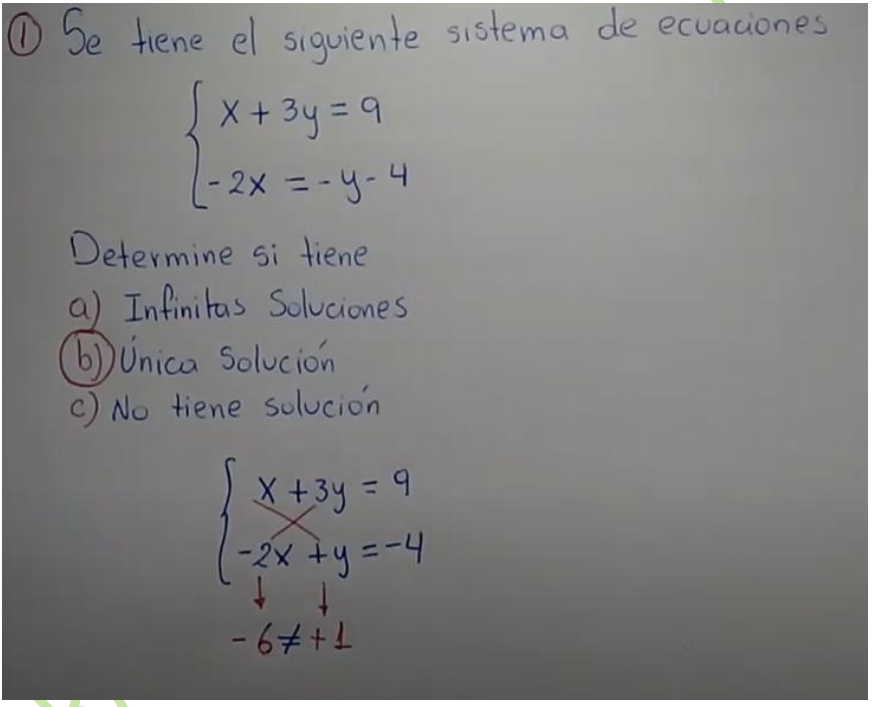


Segundo paso: Multiplicar EN CRUZ. Hacemos:

X por Y es igual a 1 por 1 con lo que nos queda 1.

-2X por 3Y es igual a 2- por 3 con lo que nos queda -6.

El resultado sería +1 y 6, con lo que vemos que +1 ≠ -6 (esto se lee, +1 es diferente de -6)



Nota de Ramón: Aquí el profesor IngEDarwin lo ha multiplicado al revés de como lo he hecho yo. No importa, recuerda que por la propiedad conmutativa, el orden de los factores no altera el producto.

Como tiene una única solución es un Sistema Compatible Determinado, que es el único de los tres sistemas que se puede resolver por los métodos de Substitución, Igualación y Reducción.

Ahora estudiemos los tres métodos

3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x=3-2y \Rightarrow x=3-2\cdot(1)=1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x-3\cdot 1=-1 \Rightarrow 2x=-1+3=2 \Rightarrow x=2/2=1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

6. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7.$

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

4 NOMBRE DE SOLUCIONS D'UN SISTEMA LINEAL

En general, un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites té una solució única. És el punt on es tallen les dues rectes, com ja hem vist. No obstant això, no sempre ocorre així. Vegem, a continuació, la resta de casos que poden donar-se:

SISTEMES SENSE SOLUCIÓ

Hi ha sistemes les equacions dels quals diuen coses contradictòries. Per exemple:

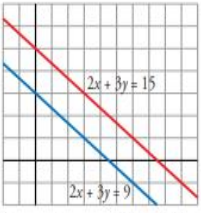
a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 18 \end{cases}$

En els dos casos és impossible aconseguir que les dues igualtats siguin certes per als mateixos valors de x i de y:

En *a)*, si $2x + 3y$ és igual a 15, no pot ser, alhora, igual a 9.

En *b)*, com $4x + 6y$ és el doble de $2x + 3y$, hauria de ser igual a 30 i no a 18.

Els sistemes que no tenen solució es denominen **incompatibles**.



Sistema incompatible. Gràficament, són dues rectes paral·leles. No tenen cap punt en comú.

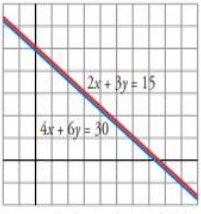
SISTEMES AMB SOLUCIONS INFINITES

Hi ha sistemes les dues equacions dels quals diuen la mateixa cosa. És a dir, són dues vegades la mateixa equació. Per exemple:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 30 \end{cases}$

Les solucions del sistema són les de qualsevol de les dues equacions. Com ja sabem, una equació amb dues incògnites té solucions infinites.

Aquests sistemes es denominen **indeterminats**.



Sistema indeterminat. Gràficament, és dues vegades la mateixa recta. Tots els punts coincideixen.

Els sistemes que no tenen solució es denominen **incompatibles**. Gràficament, són dues rectes paral·leles: no tenen cap punt en comú.

Els sistemes que tenen solucions infinites es denominen **indeterminats**. Gràficament, són dues rectes coincidents: tots els punts són comuns.

6 MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ

Aquest mètode de resolució d'un sistema d'equacions consisteix a aïllar una incògnita en una de les equacions i **substituir-la** en l'altra.

En la pràctica, en aplicar aquest mètode només escrivim en cada pas l'equació que transformem, en lloc d'escriure el sistema complet cada vegada.

Descrivim els passos que convé fer per aplicar aquest mètode:

① Aïllem una incògnita en una de les equacions.

② Substituïm l'expressió d'aquesta incògnita en l'altra equació i obtenim una equació amb només una incògnita.

③ Resolem aquesta equació.

④ Substituïm el valor obtingut en l'equació on apareixia la incògnita aïllada.

⑤ Hem obtingut, així, la solució.

RESOLUCIÓ DEL SISTEMA $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ PEL MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ

①

Aïllem la x en la segona equació:

$x = 2y - 1$

②

$2(2y - 1) + 3y = 19$

③

$4y - 2 + 3y = 19 \rightarrow y = 3$

④

$x = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

⑤

Solució: $x = 5,\ y = 3$

EXERCICI RESOLT

Resolem pel mètode de substitució el sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

① Aïllem la x en la segona equació: $x = \dfrac{1 - 6y}{2}$

② Substituïm aquesta expressió de la x en la primera: $3\left(\dfrac{1 - 6y}{2}\right) + 5y = 7$

③ Resolem l'equació que en resulta:

Suprimim el denominador: $3(1 - 6y) + 10y = 14$

Simplifiquem: $3 - 18y + 10y = 14 \rightarrow -18y + 10y = 14 - 3 \rightarrow -8y = 11$

Aïllem la incògnita: $y = -11/8$

④ Substituïm el valor de y en $x = \dfrac{1 - 6y}{2} \rightarrow x = \dfrac{1 - 6(-11/8)}{2} = \dfrac{37}{8}$

Hem obtingut la solució: $x = \dfrac{37}{8},\ y = -\dfrac{11}{8}$

⑤ Comprovació:

$3 \cdot \dfrac{37}{8} + 5 \cdot \left(-\dfrac{11}{8}\right) = 7$ CORRECTE

$2 \cdot \dfrac{37}{8} + 6 \cdot \left(-\dfrac{11}{8}\right) = 1$ CORRECTE

La solució és vàlida.

7 MÈTODE D'IGUALACIÓ

Consisteix a aïllar la mateixa incògnita en les dues equacions i **igualar** les expressions que en resulten.

Descrivim a continuació els passos que convé fer per a aplicar aquest mètode.

① Aïllem la mateixa incògnita en les dues equacions.

② Igualem les expressions, la qual cosa dóna lloc a una equació amb una incògnita.

③ Resolem aquesta equació.

④ Substituïm el valor obtingut en qualsevol de les dues expressions on apareixia aïllada l'altra incògnita.

⑤ Hem obtingut, així, la solució.

RESOLUCIÓ DEL SISTEMA $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ PEL MÈTODE D'IGUALACIÓ

①

$$\begin{cases} x = \dfrac{19 - 3y}{2} \\ x = -1 + 2y \end{cases}$$

②

$$\frac{19 - 3y}{2} = -1 + 2y$$

③

$$19 - 3y = 2(-1 + 2y) \rightarrow y = 3$$

④

$$x = -1 + 2 \cdot 3 = 5$$

⑤

Solució: $x = 5,\ y = 3$

EXERCICI RESOLT

Resolem pel mètode d'igualació el sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

① Aïllem x en cadascuna de les equacions: $x = \dfrac{7 - 5y}{3},\ x = \dfrac{1 - 6y}{2}$

② Igualem ambdues expressions: $\dfrac{7 - 5y}{3} = \dfrac{1 - 6y}{2}$

③ Resolem l'equació que en resulta:

Suprimim els denominadors: $2(7 - 5y) = 3(1 - 6y)$

Simplifiquem:

$$14 - 10y = 3 - 18y \rightarrow -10y + 18y = 3 - 14 \rightarrow 8y = -11$$

Aïllem la incògnita: $y = -\dfrac{11}{8}$

④ Substituïm el valor de y en qualsevol de les expressions del primer pas:

$$x = \frac{7 - 5 \cdot (-11/8)}{3} = \frac{7 + (55/8)}{3} = \frac{111}{24} = \frac{37}{8}$$

Hem obtingut la solució: $x = \dfrac{37}{8},\ y = -\dfrac{11}{8}$

⑤ La comprovació es faria com en la pàgina anterior.

8 MÈTODE DE REDUCCIÓ

TINGUES EN COMPTE

Hem multiplicat:

- La primera equació pel coeficient de la x en la segona.
- La segona equació pel coeficient de la x en la primera.

D'aquesta manera, obtenim dues equacions amb el mateix coeficient de la x. En restar-les, desapareix aquesta incògnita.

Observa atentament com resolem el sistema següent:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \xrightarrow{\text{multipliquem els dos membres per 4}} 12x + 8y = 28 \\ 4x - 3y = 15 \xrightarrow{\text{multipliquem els dos membres per 3}} 12x - 9y = 45 \end{cases}$$

Restem membre a membre les dues equacions $\rightarrow$ $17y = -17$

La incògnita y, la tenim quasi aïllada $\longrightarrow$ $y = -1$

Substituïm la y en una de les equacions inicials i resolem:

$$3x + 2 \cdot (-1) = 7 \rightarrow 3x = 7 + 2 \rightarrow x = 3$$

Solució: $x = 3$, $y = -1$.

En essència, aquest mètode consisteix a preparar les dues equacions perquè una de les incògnites tingui el mateix coeficient en les dues. Restant les equacions que en resulten, membre a membre, obtenim una equació amb només una incògnita (hem **reduït** el nombre d'incògnites). En resum:

NO HO OBLIDIS

Aquest mètode és especialment còmode quan:

- Una de les incògnites té coeficients iguals.
- Els coeficients d'una de les incògnites són l'un múltiple de l'altre.

① Preparem les dues equacions (multiplicant-les pels nombres que convinguin).

② En restar-les desapareix una de les incògnites.

③ Resolem l'equació que en resulta.

④ Substituïm el valor obtingut en una de les inicials i resolem.

⑤ Obtenim, així, la solució.

EXERCICI RESOLT

Resolem per reducció: a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 5y = 38 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases}$

a) Si sumem les dues equacions desapareix la y:

$$7x = 49 \rightarrow x = 7; \quad 3 \cdot 7 + 5y = 11 \rightarrow y = -2$$

Solució: $x = 7$, $y = -2$.

b) Si multipliquem la segona per 2 igualem els coeficients de la y:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 10x + 4y = 30 \end{cases}$$

Restem : $-7x = -21 \rightarrow x = 3$

Substituïm: $3 \cdot 3 + 4y = 9 \rightarrow y = 0$

Solució: $x = 3$, $y = 0$.

9 REGLES PRÀCTIQUES PER RESOLDRE SISTEMES LINEALS

Si una o les dues equacions del sistema tenen una fisonomia[1] complicada, comencem per «arreglar-les» fins a arribar a l'expressió $ax + by = c$.

Recordem alguns avantatges dels mètodes apresos:

- El mètode de substitució és especialment útil quan una de les incògnites té coeficient 1 o –1 en alguna de les equacions.
- El mètode de reducció és molt còmode d'aplicar quan una incògnita té el mateix coeficient en les dues equacions o bé els coeficients són l'un múltiple de l'altre.
- Podem evitar les operacions amb fraccions si apliquem dues vegades el mètode de reducció per aïllar, així, cada una de les incògnites. Això és molt útil quan els coeficients de les incògnites són nombres grans.

EXERCICIS RESOLTS

1. *Resolem:* $\begin{cases} \dfrac{3(x-5)}{2} - \dfrac{y-x}{3} = \dfrac{y}{6} + 3 \\ -3(x-y-4) - 10 = y - 1 \end{cases}$

SUPRIMIM DENOMINADORS EN LA PRIMERA

$$\begin{cases} 9(x-5) - 2(y-x) = y + 6 \cdot 3 \\ -3(x-y-4) - 10 = y - 1 \end{cases}$$

SUPRIMIM PARÈNTESIS

$$\begin{cases} 9x - 45 - 2y + 2x = y + 18 \\ -3x + 3y + 12 - 10 = y - 1 \end{cases}$$

AGRUPEM TERMES I SIMPLIFIQUEM

$$\begin{cases} 11x - 3y = 63 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases}$$

RESOLEM PER QUALSEVOL MÈTODE

Solució: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 12 \end{cases}$

2. *Resolem* $\begin{cases} 5x - 7y = 13 \\ 4x + 9y = 20 \end{cases}$ *per reducció per aïllar cada incògnita.*

Per aïllar la x:

$$\begin{matrix} (1.ª)\cdot 9 \\ (2.ª)\cdot 7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 45x - 63y = 117 \\ 28x + 63y = 140 \end{cases}$$

Sumem: $73x = 257$

Per aïllar la y:

$$\begin{matrix} (1.ª)\cdot 4 \\ (2.ª)\cdot 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 28y = 52 \\ 20x + 45y = 100 \end{cases}$$

Restem: $-73y = -48$

La solució, ara, és immediata: $x = 257/73$, $y = 48/73$

10 TRADUCCIÓ D'ENUNCIATS A SISTEMES D'EQUACIONS

Sol ser més senzill plantejar un problema algebraic complex mitjançant un sistema d'equacions que mitjançant una equació única amb una incògnita. Vegem els passos que convé fer:

① Identifiquem els elements que hi intervenen i donem nom a les incògnites.
② Expressem mitjançant equacions les relacions que hi ha.
③ Resolem el sistema d'equacions que en resulta.
④ Interpretem la solució i l'ajustem a l'enunciat.

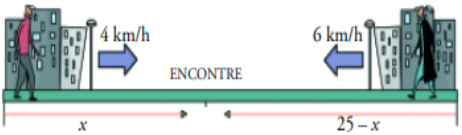
EXERCICI RESOLT

Dues poblacions A i B disten 25 km. Un vianant surt de A cap a B a una velocitat de 4 km/h. Simultàniament, surt de B cap a A un altre vianant a 6 km/h. Calculem el temps que tarden a trobar-se i la distància que ha recorregut cada vianant fins a aquest instant.

① Identifiquem els elements i determinem les incògnites.

TINGUES EN COMPTE

Un bon esquema serveix per relacionar les dades i les incògnites.



	DISTÀNCIA	TEMPS	VELOCITAT
1.r VIANANT	x	t	4
2.n VIANANT	$25 - x$	t	6

② Expressem, mitjançant equacions, les relacions que hi ha.

Com que ESPAI = VELOCITAT · TEMPS: $\begin{cases} \text{1.r vianant:} & x = 4t \\ \text{2.n vianant:} & 25 - x = 6t \end{cases}$

③ Resolem el sistema d'equacions.

$$\begin{cases} x = 4t \\ 25 - x = 6t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 25 - 4t = 6t \rightarrow 10t = 25 \rightarrow t = 2{,}5 = 2\text{ h }30\text{ min} \\ x = 4t = 4 \cdot 2{,}5 = 10\text{ km} \end{matrix}$$

④ *Solució*: Es troben 2 h 30 min després de sortir.

El 1.r vianant recorre 10 km i el 2.n, 25 – 10 = 15 km.

INECUACIONES.

Índice

1. INTERVALOS
   1.1. TIPOS DE INTERVALOS
   1.2. SEMIRRECTAS REALES
2. INECUACIONES
   2.1. INECUACIONES EQUIVALENTES
3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA
   3.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO
   3.2. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
   3.3. SISTEMAS DE INECUACIONES
   3.4. INECUACIONES EN VALOR ABSOLUTO
4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS
   4.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS
   4.2. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

1. INTERVALOS

Recuerda que:

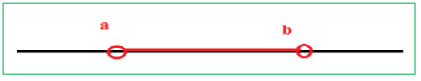
Un intervalo de números reales es un subconjunto del conjunto de los números reales, que, intuitivamente está formado por una sola pieza.

1.1. Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras $I = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.

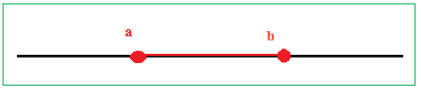
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras $I = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente:

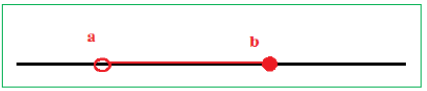


Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de éstos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior sí, en otras palabras:

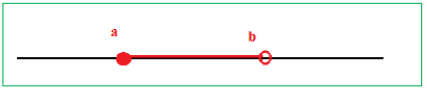
$$I = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\},$$

observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.



Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior sí, en otras palabras $I = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Gráficamente:



1.2. Semirrectas reales

Semirrecta de los números positivos $S = (0, \infty)$, es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos $S = (-\infty, 0)$, es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\Re = (-\infty, \infty)$.

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

2. INECUACIONES

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por ejemplo:

- $-2 < 5$, $\quad 4 \geq x + 2$, $\quad x^2 - 5 \geq x$, $\quad x + y \geq 2$.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

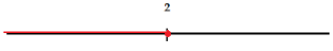
El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Así,

- $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$ 

2.1. Inecuaciones equivalentes:

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

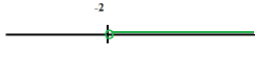
- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$ 

3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

3.1. Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{o} \quad ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con *x* a un miembro y los números al otro.

4º) **Reducir** términos semejantes.

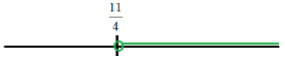
5º) **Despejar** la *x*.

Ejemplo:

- $\frac{x-3}{3}-\frac{(x-7)}{6}>\frac{4-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-3)-(x-7)}{6}>\frac{3(4-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-3)-(x-7)>3(4-x)$

$$\Leftrightarrow 2x-6-x+7>12-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x>6-7+12 \Leftrightarrow 4x>11 \Leftrightarrow x>\frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4},+\infty\right)$$



3.2. Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

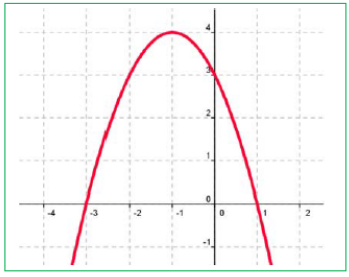
empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- Representa gráficamente la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$ e indica en qué intervalos es $-x^2 - 2x + 3 > 0$.



Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad $\geq$, $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ la solución sería:

$$x \in [-3, 1].$$

Si fuera $-x^2 - 2x + 3 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3) \cup (1, +\infty)$.

Si fuera $-x^2 - 2x + 3 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3] \cup [1, +\infty)$.

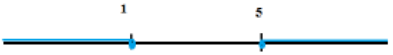
Ejemplo:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ sus raíces son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		−		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



3.3. Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es aquel en el que la única variable que interviene en todas las ecuaciones está elevada a un exponente igual a la unidad.

Sistemas de dos ecuaciones, tienen por expresión general:

$$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$$, con cualesquiera de los signos <, >, $\leq$ ó $\geq$.

Para resolverlos, independientemente del número de inecuaciones que compongan el sistema, se resuelve cada inecuación por separado, y al final se determina la solución como la intersección de todas ellas.

Ejemplo:

- $\begin{cases} 2x > 4 \\ x + 5 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$, los intervalos solución son $\begin{cases} (2, +\infty) \\ (-\infty, 5] \end{cases} \Rightarrow (2, +\infty) \cap (-\infty, 5] = (2, 5]$

Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es $(2, 5]$.

Gráficamente puede verse:

3.4. Inecuaciones en valor absoluto

Una inecuación en valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La expresión general es de la forma $|ax+b| \le c$, empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, aplicamos la definición de valor absoluto de una cantidad y pasamos a un sistema de dos ecuaciones cuya solución es la solución de la inecuación.

$$|ax+b| \le c \text{ por definición } \begin{cases} ax+b \le c \\ -ax-b \le c \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|2x-4| \le 12 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4 \le 12 \\ -2x+4 \le 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 8] \\ [-4, +\infty) \end{cases} \Rightarrow [-4, 8] \Rightarrow$$

$$|2x-6| > 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6 > 10 \\ -2x+6 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases}.$$

No existe ningún x que a la vez sea menor que –2 y mayor que 8, pero la solución son los valores que o bien pertenecen a un intervalo o bien al otro: $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$.

Comprueba que, por ejemplo, $x = 10$ verifica que $2x - 6 = 20 - 6 = 14 > 10$, y que $x = -3$, también ya que $2x - 6 = -6 - 6 = -12$ cuyo valor absoluto es mayor que 10.

4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

4.1. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Es toda inecuación del tipo: $ax + by > c$, con cualesquiera de los signos <, >, ≤ o ≥. Para resolverlas:

1º) **Representamos gráficamente** la función lineal asociada $ax + by = c$.

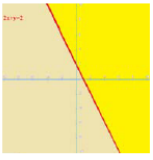
2º) La recta divide al plano en **dos semiplanos**. Utilizando un punto obtenemos cual es el semiplano solución.

3º) La **inclusión o no** en dicha solución de la frontera, depende de si la desigualdad es estricta o no, respectivamente.

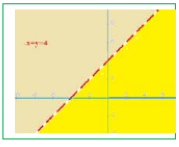
Ejemplo:

$2x + y \ge 2$.

Se dibuja la recta $2x + y = 2$. El punto (0, 0) no verifica la desigualdad, luego el semiplano solución es el otro.
El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, incluyendo la recta que se marca de forma continua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación.



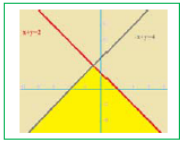
Ejemplo:



$-x + y < 4$.

Dibujamos la recta $-x + y = 4$. El punto (0, 0) verifica la desigualdad.
El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, excluyendo la recta que se marca de forma discontinua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación y los de la recta no lo hacen.

RESUMEN

Noción	*Definición*	*Ejemplos*
Inecuación	Desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas	$4 \geq x + 2$
Inecuaciones equivalentes	Si tienen la misma solución	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades de las desigualdades	▸ Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la desigualdad: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ ▸ Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ ▸ Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	▸ $3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ ▸ $3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ ▸ $-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ ▸ $3 - x < 2 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inecuación de primer grado con una incógnita	$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b,\ ax \leq b$	$x < 1$
Inecuación de segundo grado con una incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. No hay solución	
Inecuación en valor absoluto	$\lvert ax + b \rvert \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2$ y $-(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5$ y $x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	$ax + by > c$ Representamos gráficamente dos semiplanos que separa la recta y decidimos.	$-x + y < 4$
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	Representamos las regiones angulares separadas por las dos rectas y decidimos cuál o cuáles son solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

NOCIONES SOBRE ANÁLISIS MATEMÁTICO I.

Unidad Didáctica 7 Funciones y gráficas

1. FUNCIONES REALES

1.1. Concepto de función

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde ***un solo*** valor de la dependiente, y.

Para indicar que la variable (y) depende o es función de otra, (x), se usa la notación $\boldsymbol{y = f(x)}$, que se lee *"y es función de x"*.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un elemento, x, y devuelve otro valor, $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$, se introduce valores de x, y nos devuelve sus cuadrados.

Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de y (variable dependiente) para cada valor de x (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.
Las funciones se introdujeron para estudiar procesos. Si haciendo lo mismo nos pueden salir cosas distintas, no se puede estudiar del mismo modo.

Ejemplos:

Pensemos en la factura de teléfono. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado (suponiendo, claro, que cuesten lo mismo todos) también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.

Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.

Actividades resueltas

Indica si las siguientes situaciones representan una función o no

a) El espacio recorrido por un coche y el tiempo.

b) Las ganancias en la Bolsa en función de lo invertido.

c) El cuadrado de un número.

Solución:

Son funciones la a) y la c). La b) no lo es porque no sabemos cuánto ganamos.

1.2. Gráfica de una función

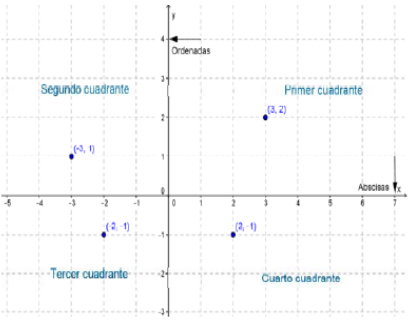
En muchas ocasiones, la manera más sencilla de ver cómo se comporta una función es dibujarla en el plano cartesiano. Vamos a recordar muy brevemente qué era el plano cartesiano (cartesiano, viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como **cuadrantes**:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.



Sistema de referencia cartesiano

Para representar puntos, sólo hay que recordar que la primera componente (o abscisa) es x, por lo que debe ir al eje X (eje de abscisas). La segunda componente (u ordenada) es y, por tanto va al eje Y (eje de ordenadas).

El sentido positivo es a la derecha y arriba. Si alguna de las componentes es negativa, entonces se coloca en sentido contrario.

Para representar una gráfica, lo que debemos hacer es simplemente tomar valores (x, y) o, lo que es lo mismo $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$. Luego los unimos, bien con líneas rectas, bien ajustando "a ojo" una línea curva. Naturalmente, ahora nos aparecen dos cuestiones:

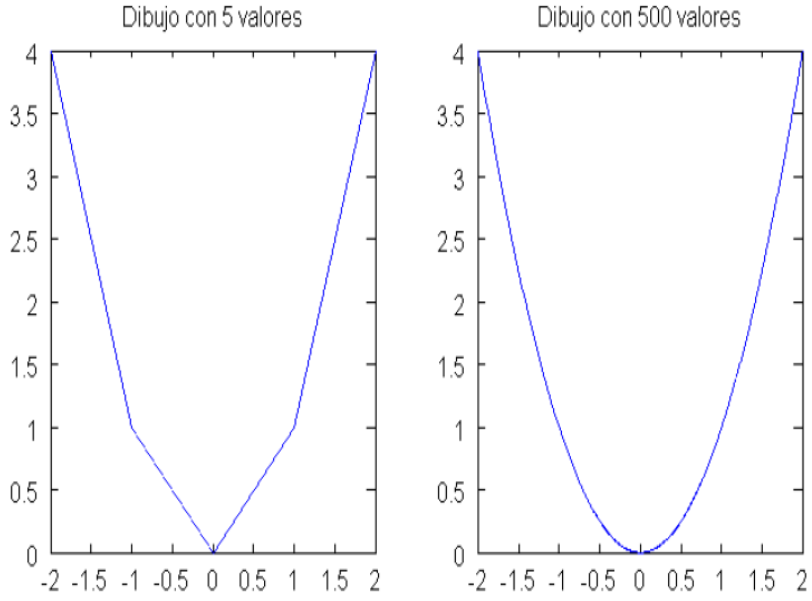
- ¿Cuántos valores hay que dar?
- ¿Qué valores le damos?

En general, no hay una respuesta clara a esas preguntas, aparte de la obvia "cuánto más, mejor". Si una gráfica se dibuja con ordenador, normalmente se le da un intervalo y el número de valores que queremos que represente. Típicamente, un ordenador da MUCHOS valores: 500, 1000, ...

Ejemplo:

Dibujamos la función $y=x^2$ en el intervalo [–2, 2] con un ordenador (este dibujo está hecho con el programa *Octave*, que es código abierto y puedes descargar libremente).

Hacemos dos gráficas, una dando 5 valores y la otra 500. Observa la diferencia entre los dos dibujos. Observa también que el ordenador une los puntos con segmentos de rectas.

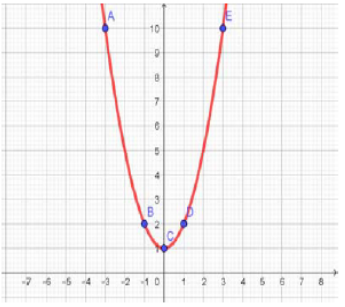


Actividad resuelta

Dibujar la función .

En el capítulo siguiente indicaremos los valores que es recomendable tomar. De momento, nos limitaremos a dar unos pocos y unir puntos. Por ninguna razón en especial, tomamos –3, –1, 0, 1 y 3. Recordemos que al sustituir se usan SIEMPRE paréntesis. Es obligatorio en el caso de que el valor de *x* sea negativo. Así, $(-3)^2+1=10$. Obtenemos entonces la tabla de valores y basta unir los puntos (dándoles "a ojo" un poco de curva).

x	f (x)
–3	10
–1	2
0	1
1	2
3	10

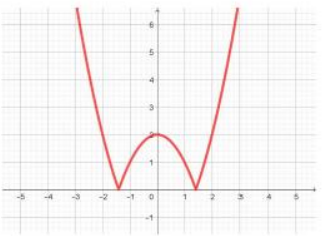


Una cuestión a reseñar de las gráficas es el hecho de que, directamente a partir de un dibujo podemos ver si corresponde a una función o no. Para verlo, basta fijarse en si a algún valor de *x* le corresponde más de un valor de *y*. Si NO lo hay, es una función. Observamos que el ejemplo anterior es una función.

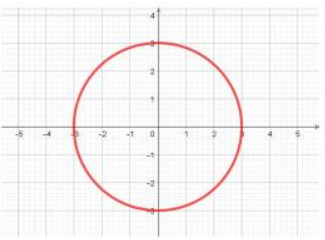
Actividad resuelta

Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función:

a)



b)



La gráfica a) es una función. La gráfica b) NO lo es porque, por ejemplo, para *x* = 0 hay dos valores de *y*.

1.3. Diferentes maneras de expresar una función

Recordemos, una vez más, que una función es la descripción de cómo se relacionan dos magnitudes. Así pues, esta descripción la podemos saber de varias maneras.

Funciones dadas por tablas

Probablemente, la manera más sencilla en la que se puede dar una función es con una tabla de valores. Es además la manera más experimental: observamos un proceso y medimos las cantidades que nos salen. Así tenemos una idea de cómo se relacionan.

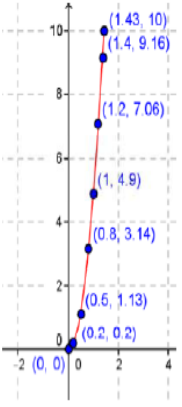
Dibujar su gráfica no puede ser más sencillo. Basta poner los puntos y, en su caso, unirlos.

Ejemplo:

Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:

Espacio (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Tiempo (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

Es muy sencillo dibujar su gráfica. Basta representar los puntos y unirlos (esta gráfica está hecha con el programa *Geogebra*, también de código abierto):



Date cuenta que tiene sentido "*rellenar*" el espacio entre puntos. Aunque no lo hayamos medido, la pelota no puede teletransportarse, por lo que seguro se puede hablar de dónde está en el instante 0,7, por ejemplo. Y obviamente, el espacio recorrido estará entre 1,13 (que corresponde a 0,5 segundos) y 3,14 (que corresponde a 0,8 segundos).

La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿es siempre así?, ¿puede haber funciones donde NO TENGA SENTIDO poner valores intermedios?

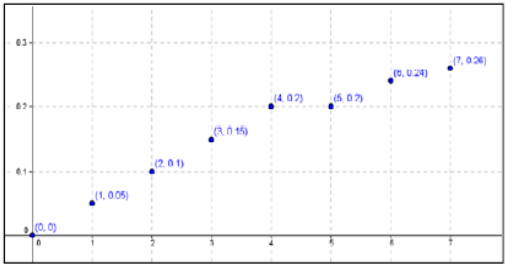
A poco que pienses, te darás cuenta de que sí las hay. Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

En una librería, han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias, dependiendo del número de copias:

En una librería, han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias, dependiendo del número de copias:

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28



Se puede construir la representación gráfica dibujando estos puntos.

La cuestión de si podemos dibujar puntos intermedios entre los anteriores se responde por sí sola.
No se pueden hacer 1,5 copias.

Solamente puedes hacer un número entero de copias.
Por tanto, no tiene sentido plantearse siquiera dar valores intermedios ni dibujarlos.

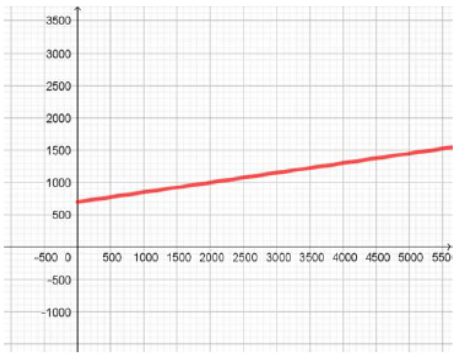
Funciones dadas por una expresión

En muchísimas ocasiones, sabemos suficiente de la relación entre dos magnitudes como para conocer exactamente una expresión que las relaciona. Vamos a empezar con un ejemplo.

Ejemplo:

Supongamos que el salario de un comerciante es de 700 euros fijos más el 15 % de las ventas. Se supone que si no venda nada solamente ganará 700 €. Esto significa que el salario f(x) para unas ventas x viene dado por la expresión:

La gráfica de esta función es:



Fíjate que no tiene sentido representar puntos en el segundo cuadrante pues no puede hacer un número negativo de ventas.

Las graduaciones que se toman en los ejes no siempre tienen que ir de 1 en 1.

Funciones definidas a trozos

Piensa en la siguiente situación para la tarifa de un teléfono móvil. Se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.

Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después.

Una **función definida a trozos** es aquella que viene dada por una expresión distinta para diferentes intervalos.

En el ejemplo del móvil, la factura viene dada por

$$f(x)=\begin{cases} 10 & si \quad x \le 500 \\ 10+0{,}05\cdot(x-500) & si \quad x > 500 \end{cases}.$$

Veamos brevemente por qué. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €. Para valores mayores, los minutos que gastamos POR ENCIMA DE 500 son (x–500) y por tanto lo que pagamos por los minutos es $10 + 0{,}05 \cdot (x - 500)$, pues lo medimos en euros. Hay que sumarle los 10 € que pagamos de fijo.

RAMO

1.4. Dominio y recorrido de una función

Hasta ahora, no nos hemos preocupado de qué valores pueden tener la *x* y la *y*. Pero es evidente que no siempre pueden tomar todos los valores de la recta real. Por ejemplo, si una función nos da la altura con respecto del peso no vamos a poder tener valores negativos. Para ello existen los conceptos de dominio y recorrido.

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que la variable independiente (*x*) puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido, rango o imagen** de una función es el conjunto de valores que la variable dependiente (*y*) puede tomar. Se escribe *Rgf* o *Rg*(*f*). También *Im f* o *Im(f)*.

El dominio de una función que viene dada por un polinomio es el conjunto de los números reales.

Normalmente, el recorrido es más directo de calcular. Simplemente, miramos la gráfica y vemos qué valores puede tomar la variable dependiente (*y*).

El dominio suele ser un asunto bastante más complicado. En general, existen dos razones por las que un valor de *x* NO pertenezca al dominio.

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora del día, es evidente que *x* debe estar entre 0 y 24. ¡¡Un día tiene 24 horas!! De ninguna manera podemos hablar siquiera de lo que hemos gastado la hora 25.

2. La operación que nos da *f*(*x*) no puede hacerse. Por ejemplo, no se puede dividir entre 0, por lo que la función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x \in \Re; x \neq 0\}$, es decir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El primer caso viene dado por la aplicación práctica y nuestro sentido común. El segundo es el que tiene más dificultad y por eso vamos a dedicarle un poco más de tiempo.

Cálculo de dominios

Existen dos operaciones que NO están permitidas.

a. Dividir entre 0.

b. Hacer raíces cuadradas o de índice par de números negativos. Ten en cuenta que la raíz cuadrada de 0 SÍ está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos alguna operación más, pero por ahora, sólo esas dos operaciones. Vamos a ver un método sistemático para calcular el dominio.

Método para calcular el dominio

1. Recuadra TODAS las operaciones problemáticas.
2. Para TODAS esas operaciones, plantea una ecuación igualándola a 0. Resuelve dicha ecuación.
3. Representa en una recta todas las soluciones de todas las ecuaciones.
4. Da valores a la función. Un valor en cada intervalo y los valores límite. Si la operación se puede hacer, es que el punto o el intervalo pertenece al dominio. Si no, pues no. Puedes ver si una operación vale, o no, haciéndola con la calculadora. Si sale error, es que no se puede. Marca con una X los valores que no valen y con un tick (V) si se pueden hacer.
5. Representa la solución con intervalos. Si el punto del extremo está, es un corchete como [] y si no, un paréntesis.

Así visto, puede parecer un poco complicado. Vamos a ver un par de ejemplos.

Actividades resueltas

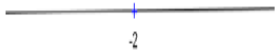
Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $x+\sqrt{2x+4}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

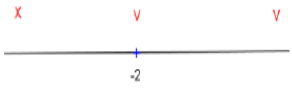
Apartado a

Vamos a seguir el procedimiento punto por punto.

1. El único posible problema es la raíz cuadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 y resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
3. Representamos en la recta los valores.
4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2 y un valor a la derecha. Por ejemplo, el –3, el –2 y el 0. Los marcamos en la recta



X	–3	–2	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ



5. El dominio es $[-2,+\infty)$ (el infinito SIEMPRE es abierto, nunca llegamos).

Apartado b

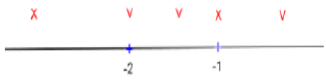
1. Tenemos dos posibles problemas. La raíz cuadrada de $x+2$ y el denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Tenemos que igualar LOS DOS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por otra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando al cuadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos en la recta los valores.

4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2, un valor entre –2 y –1, el valor –1 y un valor a la derecha de –1. Por ejemplo, el –3, el –2, el –1,5, el –1 y el 0. Los marcamos en la recta

X	–3	–2	–1,5	–1	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ

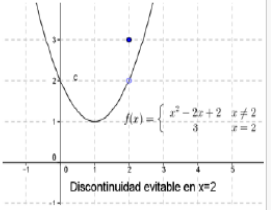


5. El dominio es $[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

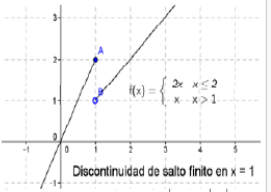
2.1. Continuidad

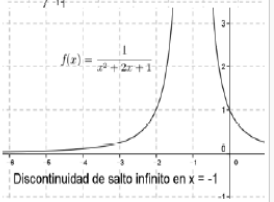
Intuitivamente, una función es continua si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, se producen "saltos" en determinados valores de la variable independiente que reciben el nombre de discontinuidades.



Una discontinuidad puede ser de tres tipos:

1. **Evitable**: En la función sólo "falla" un punto, que "no está donde debería estar". Más formalmente, si nos aproximamos al punto por la derecha y por la izquierda, nos aproximamos a un valor que no es el de la función. En este caso, la función sería continua sin más que cambiar la definición de la función en el punto que nos da problemas.
2. **De salto finito:** En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha e izquierda del punto. Estas ramas se aproximan a valores distintos (pero finitos) para cada lado. El punto de discontinuidad puede estar en una cualquiera de las ramas o incluso fuera de ellas. Da lo mismo, la discontinuidad sigue siendo de salto finito.
3. **De salto infinito:** Como en salto finito, en un punto la función tiene dos ramas diferentes. Pero en este caso, al menos una de las dos ramas (posiblemente las dos) se hace inmensamente grande o inmensamente negativa (en términos más informales "se va a infinito").



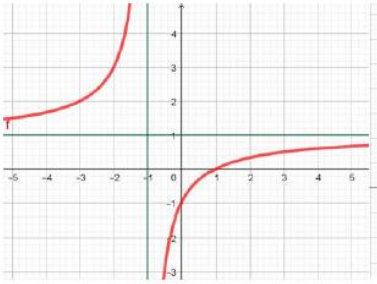


Actividades resueltas

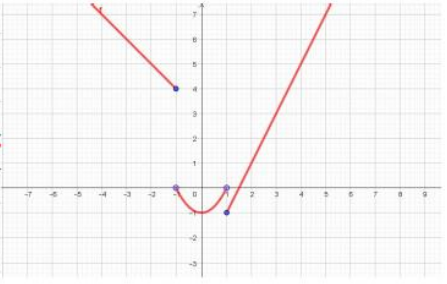
Indica en estas funciones el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad e indica el tipo de discontinuidad.

a) –

b)



Salto infinito en x = –1



Salto finito en x = –1 y en x=1.

2.2. Monotonía: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

Una función es **constante** en un intervalo (x_1, x_2) cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo (x_1, x_2) cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **creciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente creciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO disminuye.

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente disminuye también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **decreciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente decreciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO aumenta.

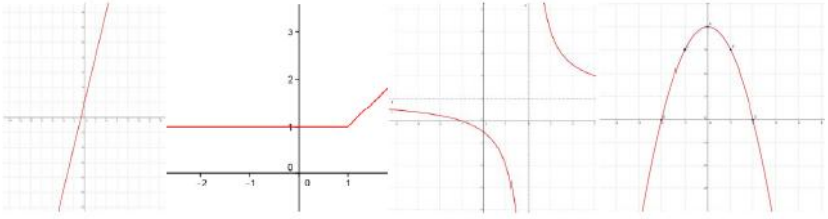
Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo cuando es estrictamente creciente o decreciente en dicho intervalo.

Una función es **monótona (en sentido amplio)** en un intervalo cuando es creciente o decreciente (en sentido amplio) en dicho intervalo.

Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo, es decir, para un conjunto de números reales. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante.

Ejemplos:

En las funciones siguientes estudia el crecimiento y el decrecimiento.



CRECIENTE siempre

CONSTANTE hasta x = 1
CRECIENTE desde x = 1
CRECIENTE (EN SENTIDO AMPLIO) siempre

DECRECIENTE hasta x = 2
DECRECIENTE desde x = 2

CRECIENTE hasta x=0
DECRECIENTE desde x = 0

Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es mayor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

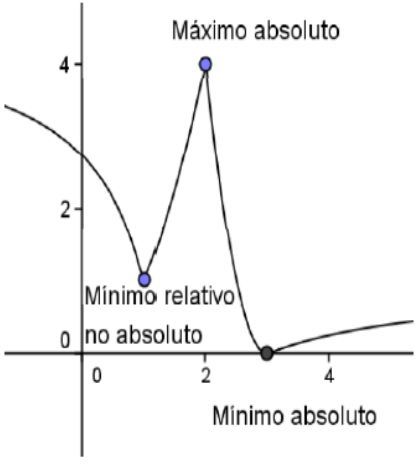
Si, además, la imagen es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

Si, además, la imagen es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

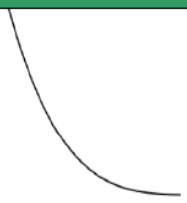
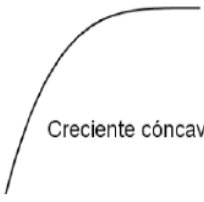
Ejemplo:



2.3. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Una función es **convexa** si al unir dos puntos de su gráfica el segmento queda por encima de dicha gráfica. Se dice **cóncava** si al hacer la misma operación queda por debajo. Un punto donde se cambia de cóncava a convexa o viceversa se llama **punto de inflexión**.

Una imagen vale más que mil palabras. Así que vamos a dibujar los cuatro tipos de funciones que tenemos:

	Creciente	Decreciente
Convexa	Creciente convexa	 Decreciente convexa
Cóncava	 Creciente cóncava	Decreciente cóncava

Puedes comprobar fácilmente que se cumple la definición. Si unes dos puntos, el segmento que forman está por encima o por debajo de la gráfica, según corresponde. Aquí a la derecha puedes ver un ejemplo con un tramo decreciente y convexo. Observa cómo el segmento queda por encima de la gráfica de la función.

2.4. Simetrías

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número y su opuesto:

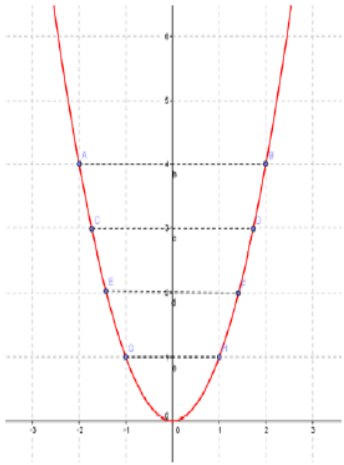
$$f(-x)=f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al eje de ordenadas, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo:

La función cuadrática $f(x)=x^2$ *es par:*

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$



Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número y su opuesto:

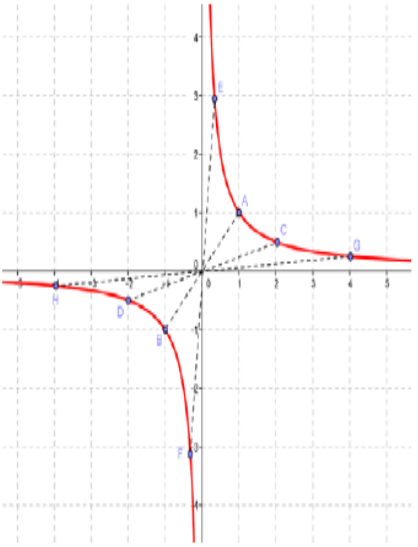
$$f(-x)=-f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

La función de proporcionalidad inversa $f(x)=\frac{1}{x}$ es impar porque:

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)}=\frac{-1}{x}=-f(x)$$



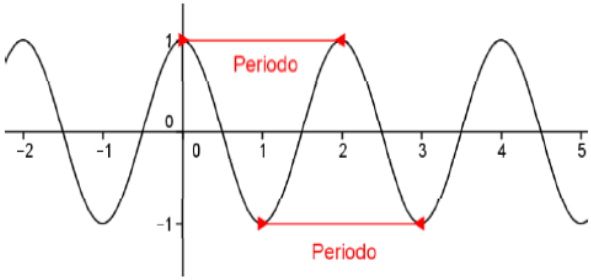
RAMON FERR

2.5. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten conforme se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

Ejemplo:

Es muy claro que la siguiente función es periódica de periodo 2. Observa que el periodo se puede medir entre dos "picos" o entre dos "valles". De hecho, se puede medir entre dos puntos equivalentes cualesquiera.



2.6. Comportamiento en el infinito

El infinito es, por propia definición, inalcanzable. Pero nos dice mucho de una función saber cómo es para valores muy grandes. Por eso, se recomienda, al dibujar una gráfica, dar un valor (o varios) positivo muy grande y un valor (o varios) muy negativo.

En algunas funciones simplemente ocurre que obtenemos valores muy grandes y "nos salimos de la tabla". Esto simplemente nos da una idea de hacia dónde va la función.

Pero en otras, y esto es lo interesante, nos aproximamos a un número finito. Eso significa que, para valores muy grandes de x, la función es aproximadamente una recta horizontal. Esta recta se llama **asíntota**.

Actividad resuelta

Dibuja la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores muy grandes y muy negativos.*

Damos valores muy grandes y vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099,\ f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001,$$

$$f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1{,}000001$$

Si damos valores muy negativos, pasa lo mismo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099,\ f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1{,}0001,$$

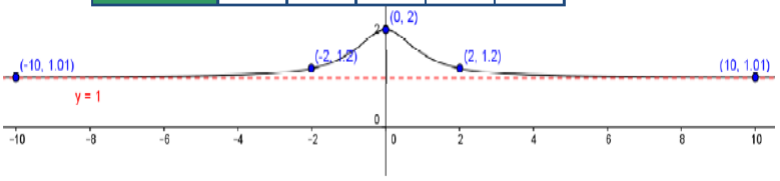
$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1{,}000001$$

Podríamos haber visto directamente que los valores iban a ser los mismos porque la función es claramente par $f(-x)=f(x)$ y por tanto $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$ etc.

Eso nos da una idea de que la recta a la que nos aproximamos (asíntota) es la recta horizontal $y = 1$.

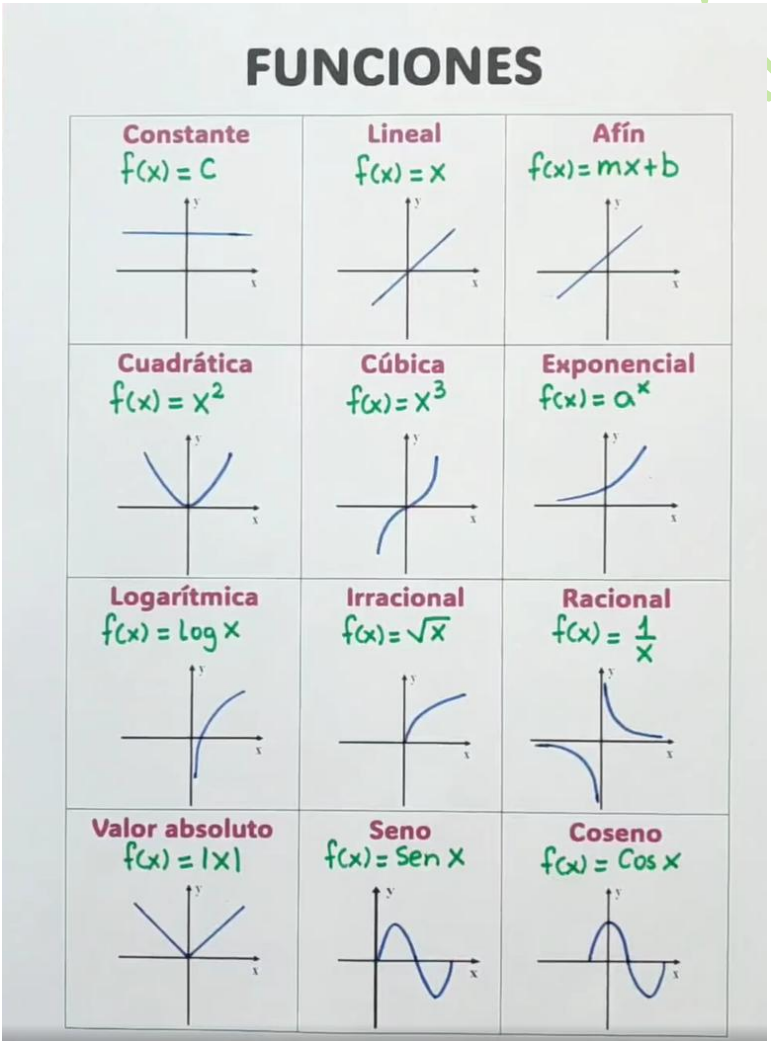
Vamos a dar unos valores más y dibujamos la función. Los valores negativos son iguales que los positivos. Hemos redondeado 1,0099 a 1,01

x	−10	−2	0	2	10
y	1,01	1,2	2	1,2	1,01



Observa la línea horizontal que es la asíntota dibujada en rojo a trazos.

Ten en cuenta que para dibujar correctamente una función, primero tenemos que estudiar los elementos principales que la caracterizan dependiendo de su expresión. En el próximo capítulo estudiaremos las funciones que vienen dadas por polinomios de primer y segundo grado.



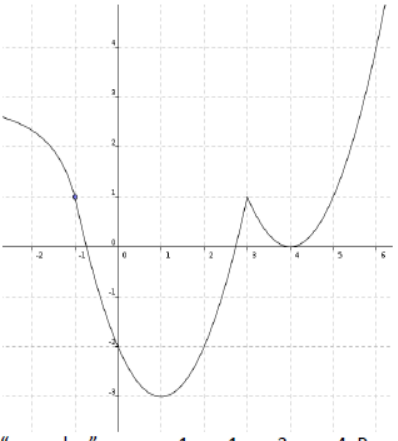
2.7. Descripción de una función

Si nos dan la gráfica de una función y nos piden describirla, es sencillo:

1. Miramos los valores de *x* donde cambia el comportamiento.
2. Describimos cada uno de los tramos
3. Describimos los máximos y mínimos indicando si son relativos o absolutos.

Actividad resuelta

Describe la función



La función es continua. Los puntos donde "pasa algo" son $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$. Pasamos a describir los tramos:

En $(-\infty, -1)$ decreciente cóncavo. En $(-1, 1)$ decreciente convexo. En $(1, 3)$ creciente convexo. En el intervalo $(3, 4)$ decreciente convexo. En $(4, +\infty)$ creciente convexo.

A veces se pone separado el crecimiento y la curvatura:

Creciente en $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

Cóncava en $(-\infty, -1)$. Convexa en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalmente hay un máximo relativo en $x = 3$ (3, 1). Hay mínimos relativos en $x = 1$ (1, -3) y $x = 4$ (4, 0). No hay máximo absoluto y en $x = 1$ hay un mínimo absoluto. Hay un punto de inflexión en (-1, 1).

No hay asíntotas. Cuando x se hace muy grande la y tiende a $+\infty$, y cuando la x se acerca a $-\infty$ la y tiende también a $+\infty$.

3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

Muchas veces, nos interesa el comportamiento de una función en un valor concreto y alguna medida sobre ella. Por ejemplo, si consideramos el espacio que recorre un coche, lo que nos puede interesar no es todo el recorrido, sino sólo la velocidad al pasar junto a un radar. Las medidas más importantes vamos a describirlas ahora.

3.1. Tasa de variación y tasa de variación media (velocidad)

La **tasa de variación** de una función entre dos puntos a y b es la diferencia entre e valor de la función para $x = a$ y el valor para $x = b$. En símbolos:

$$TV[a,b] = f(b) - f(a)$$

La **tasa de variación media** (**velocidad media**) de una función entre dos puntos a y b es el cociente entre la tasa de variación entre los mismos y la diferencia a y b. En símbolos:

$$TVM[a,b] = \frac{TV[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Estos conceptos pueden parecerte raros al principio. Pero realmente son cosas que se aplican mucho en la vida diaria. Pensemos en un coche que se mueve. El espacio que recorre entre dos momentos de tiempo es la tasa de variación. La velocidad media a lo que los ha recorrido es la tasa de variación media.

Actividad resuelta

El coche en que circulamos recorre 100 Km a 50 Km/h y luego otros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, el espacio recorrido viene dado por la función $f(t)=\begin{cases} 50t, & t\le 2 \\ 100+100\cdot(t-2), & t>2 \end{cases}$.

Se pide:

1. Justificar la función que da el espacio recorrido.
2. Calcular e interpretar las tasas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2'5, 3]
3. Calcular e interpretar las tasas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2'5, 3]
4. ¿Por qué la velocidad media NO ha sido 75 Km/h, que es la media de las velocidades?

Apartado 1.

Para justificar la función, sólo tenemos que recordar la conocida fórmula $e=vt$. Lo único que hay que ver es cuándo cambia la velocidad.

Si el coche va a 50 km/h, obviamente en 2 h llega a los 100 km y cambia la velocidad. Hasta entonces, el espacio recorrido es $50t$ (velocidad por tiempo). A partir de allí, sería $100(t-2)$ puesto que contamos el tiempo desde el instante 2. A ello se le debe sumar el espacio ya recorrido, que son 100.

Apartado 2. La tasa de variación no es más que el espacio recorrido. Basta con aplicar la definición. Como ya hemos dicho antes, no nos tiene que dar ningún miedo las funciones

definidas a trozos. Simplemente sustituimos donde corresponda y punto.

$TV[0,3]=f(3)-f(0)=[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0=200$. Entre 0 y 3 horas hemos recorrido 200 Km.

$TV[1,2]=f(2)-f(1)=50\cdot 2-50\cdot 1=50$. Entre 1 y 2 horas hemos recorrido 50 Km.

$TV[2{,}5\ ,\ 3]=f(3)-f(2{,}5)=[100+100\cdot(3-2)]-[100+100\cdot(2{,}5-2)]=100\cdot(3-2{,}5)=50$. Hemos recorrido 50 Km entre las 2,5 horas y las 3.

Apartado 3. La tasa de variación media es lo que en el lenguaje de la calle se llama velocidad (media). Y para calcularla se divide el espacio entre el tiempo.

$TVM[0,3]=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0}=66{,}67$ Km/h. Entre 0 y 3 horas nuestra velocidad media ha sido de 66'67 Km/h, una media (ajustada por el tiempo) de las velocidades.

$TVM[1,2]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{50}{2-1}=50$. Entre 1 y 2 horas nuestra velocidad ha sido de 50 Km/h, como planteaba de hecho el problema.

$TVM\ [2{,}5\ ,\ 3]=\dfrac{f(3)-f(2{,}5)}{3-2{,}5}=\dfrac{50}{3-2{,}5}=100$. Entre 2,5 y 3 horas nuestra velocidad ha sido, como era de esperar, de 100 Km/h

Apartado 4. Porque hemos pasado más tiempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h y por tanto nuestra velocidad media debe estar más cerca de 50 que de 100.

Unidad didáctica 8: Funciones polinómicas y funciones definidas a trozos

1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

1.1. Proporcionalidad directa

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa** k.

Ejemplo:

- *Cuando viajamos a velocidad constante, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales*

Tiempo (t)	0	1	2	5	10
Espacio (s)	0	5	10	25	50

y la razón de proporcionalidad es $k = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5} = \frac{50}{10} = 5$

Si observamos su gráfica, podemos comprobar que se trata de una semirrecta cuyo origen es el origen de coordenadas. En esta situación no es interesante considerar tiempos negativos, razón por la cual la representación es una semirrecta.

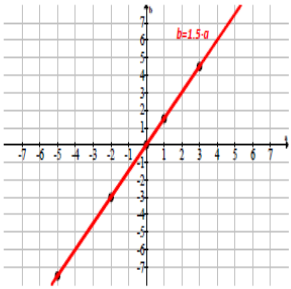
La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Se puede escribir la relación entre la magnitud A (a) y la magnitud B (b) como $b = k \cdot a$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Para representar estas relaciones de proporcionalidad directa, basta con situar los valores de cada magnitud en el plano cartesiano y unirlos mediante una recta.

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:*



Magnitud A (a)	−5	−2	0	1	3
Magnitud B (b)	−7,5	−3	0	1,5	4,5

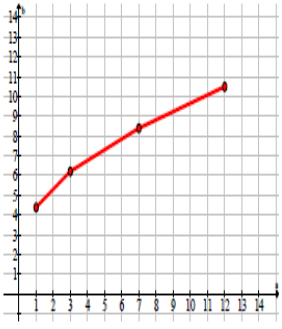
Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$k = \frac{-7,5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1,5}{1} = \frac{4,5}{3} = 1,5$. La relación se define así:

$b = 1,5 \cdot a$.

- *La siguiente tabla nos muestra el peso de un bebé los primeros meses de crecimiento. Utilizando una gráfica, decide si son magnitudes directamente proporcionales.*

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



Al representar los puntos en el plano, se observa que la gráfica no es una recta, entonces **no son directamente proporcionales**.

1.2. Función lineal. Rectas de la forma y = m · x

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado de la forma $y = m \cdot x$. Su representación en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen.

La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta que pasa por el origen. Luego la relación de proporcionalidad directa es una función lineal.

Ejemplo:

- Las proporciones se representan como rectas de la forma $b = k \cdot a$
  - donde k es la razón de proporcionalidad, $k = \frac{b}{a}$
  - a y b son los valores que toman las magnitudes A y B respectivamente.

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

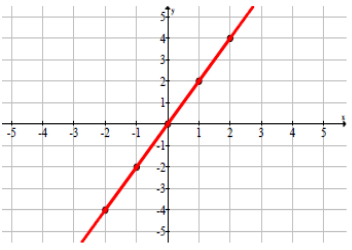
- La relación peso – coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = m\,x$.
- Muchas de las relaciones en física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa, ...

Actividades resueltas

- *Representa la recta $y = 2\,x$.*

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.

  Se puede observar, que la variable y se define dando valores a la variable x . Por esta razón x es la variable independiente (puede ser cualquier valor que se le dé) e y es la variable dependiente (depende del valor de la x).



***Nota:** para definir una recta es suficiente con dar dos puntos de ella.*

Las rectas $y = m\,x$ tienen los siguientes componentes:

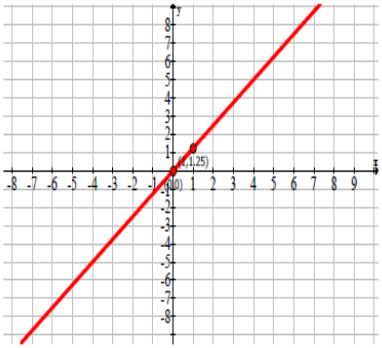
- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta, y es lo que diferencia una recta de otra.

Las características más importantes:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todos los reales: tanto x la como la y aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Actividades resueltas

- *Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de la función lineal* $y = 1,25 \cdot x$



Al tratarse de una recta, se puede observar que el dominio son todos los reales, puesto que se admite cualquier valor de la x.

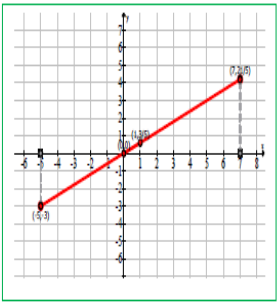
Si no se considera ningún intervalo, la recta no tiene máximos ni mínimos absolutos y relativos.

Para ver la simetría, tomamos la función $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = 1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f$ *es impar*

Es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- *Estudia la función* $y = \frac{3}{5} \cdot x$ *en el intervalo* [–5, 7].



El dominio es todo el intervalo [–5, 7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f$ *es impar*, simétrica respecto al origen.

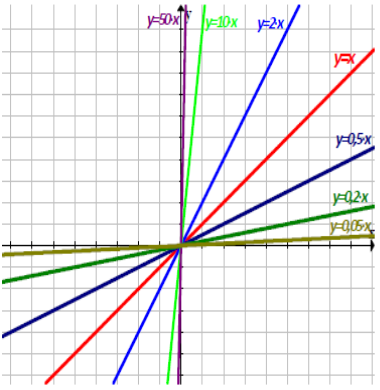
En los extremos del intervalo, existen mínimo (–5, –3) y máximo (7,21/5).

1.3. Estudio de la pendiente

Como hemos visto con anterioridad, la pendiente m es lo que diferencia unas rectas de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas.

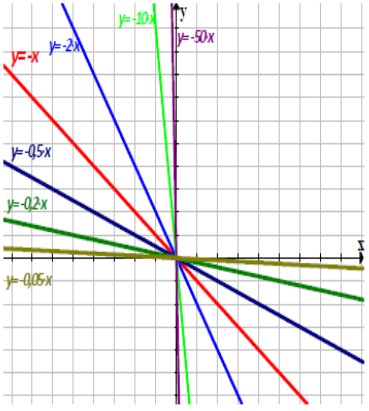
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad k.

Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Partimos de la recta $y = x$, donde $m=1$.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x

Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.

Como se puede observar, al variar la pendiente la inclinación de la recta también varia, según se van dando valores m.

La pendiente de la recta es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m > 0$, la recta es creciente.
- Si $m < 0$, la recta es decreciente.

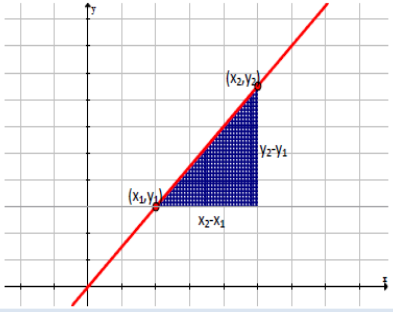
La pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable independiente x.

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza:

- Si $m>0$:
  - Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m<0$:
  - Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.

Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:



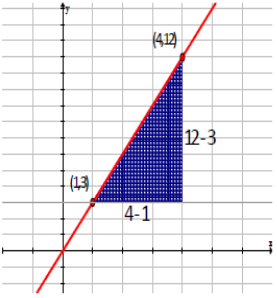
Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

es decir,

$$m=\frac{lo\ que\ sube}{lo\ que\ avanza}$$

Ejemplo:

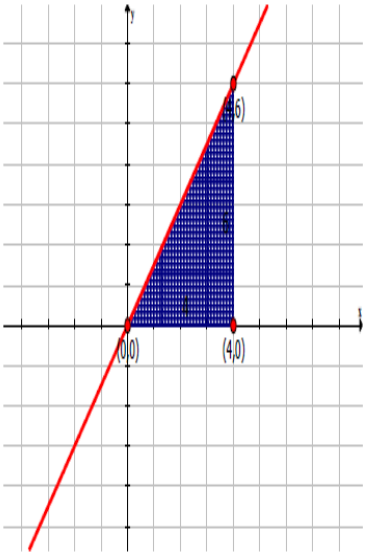


La recta sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m=\frac{12-3}{4-1}=\frac{9}{3}=3$$

Actividades resueltas

Calcula la pendiente de la siguiente recta y su expresión algebraica.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, el (0, 0) y el (4, 6).

En este caso, la altura del triángulo sombreado nos indica el valor que sube la recta, 6, y la base es el valor que la recta avanza, 4.

Al dividir estos valores, obtenemos la pendiente y la expresión algebraica de la recta.

$$m = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

$$y = 1{,}5 \cdot x$$

En estos ejemplos, la recta siempre sube, es decir, la función es creciente. ¿Qué ocurre si la recta fuese decreciente? Para no equivocarnos con los cálculos, siempre evaluamos la función de izquierda a derecha, es decir, el primer punto estará más a la izquierda, será más pequeño.

Esto es así porque la pendiente mide la cantidad de crecimiento (o decrecimiento) según la función va aumentando o lo que es lo mismo, avanzando.

1.4. Rectas de la forma y = m · x + n

Ahora, consideremos un movimiento rectilíneo y uniforme. En este tipo de movimiento la trayectoria es una línea recta y la velocidad es constante. Supongamos que previamente se ha recorrido una distancia.

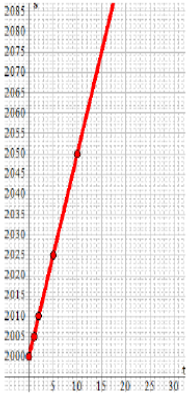
Actividades resueltas

- *Representa la gráfica s-t del movimiento rectilíneo uniforme que lleva un ciclista que se ha trasladado 2 km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.*

- En este caso, la fórmula del MRU, como tenemos un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. Con los datos del ejercicio, la expresión queda: s= 2000+5t .

Construimos la nueva tabla y dibujamos la gráfica:

Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2000
1	2005
2	2010
5	2025
10	2050



Podemos observar que hemos tenido que adaptar los ejes para poder pintar la gráfica, ya que la recta se ha desplazado 2.000 posiciones en el eje y.

La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica $y = 5 \cdot x + 2.000$, donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s , y 2.000 es el espacio inicial S_0.

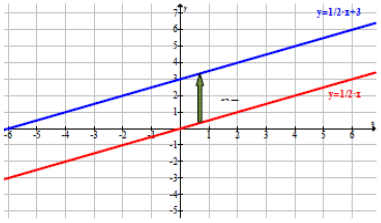
La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2000.

Las rectas de la forma $y = m \cdot x + n$ tienen la misma pendiente que las rectas $y = m \cdot x$ pero se desplazan en el eje de abscisas (eje y) n posiciones. Por esta razón, a n se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando $x = 0$.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Ejemplo:

- *Comparemos la recta* $y = 1/2 \cdot x$ *con la recta* $y = 1/2 \cdot x + 3$



Las dos rectas tienen la misma forma, es decir, la misma inclinación o la misma pendiente. En ambos casos $m = 1/2$. Son dos rectas paralelas.

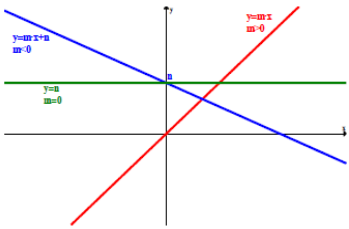
La diferencia está en el valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (donde $n=0$) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y, para convertirse en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (donde $n=3$)

Las funciones polinómicas de primer grado, o afines, se describen algebraicamente de la forma $y=m \cdot x+n$ y sus gráficas son rectas que pasan por el punto (0, n).

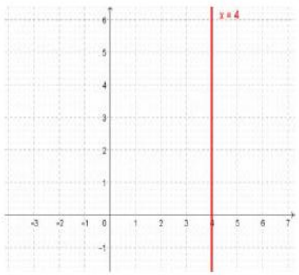
Además de la variable independiente x, la variable dependiente y, y la pendiente m, se añade el valor n que es la ordenada en el origen.

La recta $y=m \cdot x+n$ es paralela a la recta $y = m \cdot x$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones. Por esta razón, el crecimiento o decrecimiento de estas funciones se comportan de la misma manera:

- Si $m>0$, la función es **creciente**.
- Si $m<0$, la función es **decreciente**.
- Si $m=0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $y=n$.



Observa que no todas las rectas corresponden con la gráfica de una función. Este es el caso de las rectas verticales.



2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

2.1. Funciones polinómicas de segundo grado. Parábola $y = a \cdot x^2$

En el apartado anterior hemos representado las gráficas de las funciones polinómicas de primer grado. Ahora, vamos a estudiar la representación de las funciones polinómicas de segundo grado. La gráfica de este tipo de funciones será semejante a la representación de la *situación 2* al principio del capítulo.

Las funciones polinómicas de segundo grado son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de grado 2, es decir, su expresión es de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Se representan mediante **parábolas.**

Ejemplo:

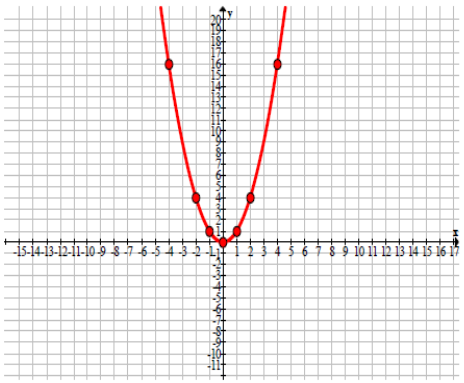
- La representación de la situación 2 es una parábola.
- En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

de

x	y
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100

Vamos a representar la parábola $y = x^2$. Para ello, construimos una tabla valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.



En la tabla y en la gráfica se pueden observar algunas características:

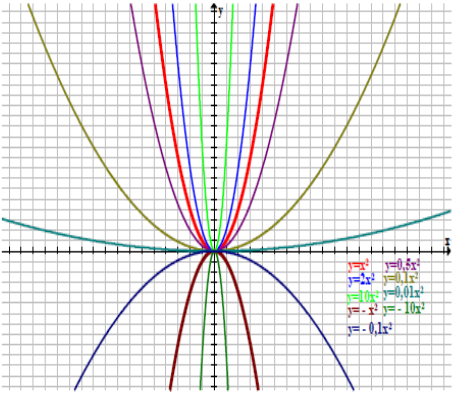
- El dominio es toda la recta real. El recorrido son los reales positivos y el cero.
- La función es continua, porque no presenta saltos.
- Es simétrica respecto al eje y, es decir, es una función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Es decreciente hasta el 0, y después creciente, luego tiene un mínimo absoluto en el (0, 0).

En este caso, $a=1$, y sabemos que si $a=-1$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Veamos lo que sucede cuando aumentamos o disminuimos el coeficiente a :



- Si $a>0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
- Si $a<0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
  - al disminuir a , la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $y=a\cdot x^2$, tienen las siguientes características:

- Son **continuas** en todo el dominio-
- El dominio es toda la recta real.
- Si $a>0$, la parábola está abierta hacia arriba, el recorrido son los reales positivos y el cero, y tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0)
- Si $a<0$, la parábola está abierta hacia abajo, el recorrido son los reales negativos y el cero, y tiene un máximo absoluto en el punto (0, 0)

A este punto se le llama **vértice** de la parábola

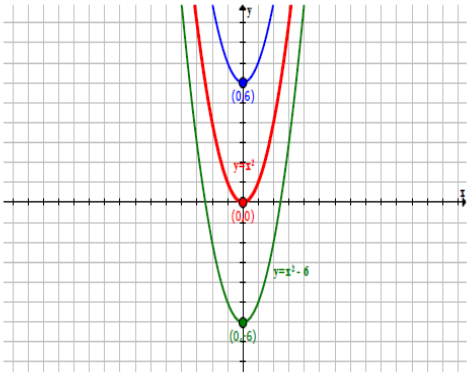
- Son funciones pares, es decir, simétricas respecto al eje y.

2.3. Traslaciones en el plano

Utilizando como plantilla la gráfica de $y=x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Desplazamientos verticales: traslaciones en la dirección del eje y: $y = x^2 + k$.

En este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo. Comparemos las parábolas $y=x^2+6$ y $y=x^2-6$ con nuestra plantilla:



Se puede observar, que al sumar 6 a la parábola x^2, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje y, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

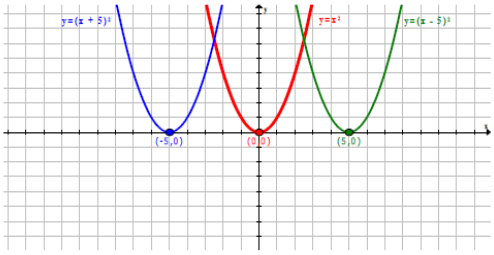
Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a x^2. En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0,-6), es decir, baja 6 unidades.

En general, la parábola $y=x^2+k$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente en el eje y. Si k es positivo, la traslación es hacia arriba y si k es negativo, hacia abajo.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(0, k)$.

Desplazamientos horizontales: traslaciones en la dirección del eje x: $y=(x-q)^2$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda. Comparemos las parábolas $y=(x+5)^2$ y $y=(x-5)^2$ con la plantilla:



En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (–5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

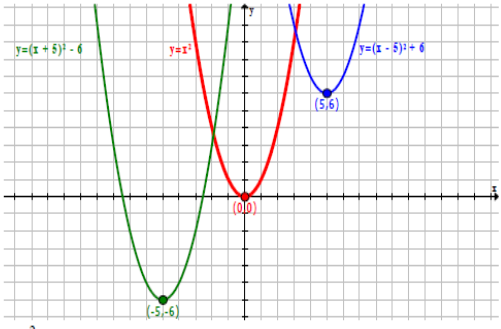
En general, la parábola $y=(x-q)^2$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada q unidades en el eje x hacia la derecha si $q>0$ y hacia la izquierda si $q<0$.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q,0)$.

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $y=(x-q)^2+k$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, movemos la plantilla k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando un movimiento oblicuo en el plano.

Comparemos la parábola $y=(x-5)^2+6$ y $y=(x+5)^2-6$ con la plantilla $y=x^2$.



La parábola $y=(x-5)^2+6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y=(x+5)^2-6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo.

Es decir, es la combinación de los dos movimientos anteriores.

En general, la parábola $y=(x-q)^2+k$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia la derecha si } q>0 \\ \text{hacia la izquierda si } q>0 \end{cases} \quad ; \quad k \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia arriba si } k>0 \\ \text{hacia abajo si } k<0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q,k).

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y=(x-q)^2+k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos pintar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con convertir esa expresión en una cuya función sepamos representar:

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica de la función cuadrática* $y=x^2+6\cdot x-4$

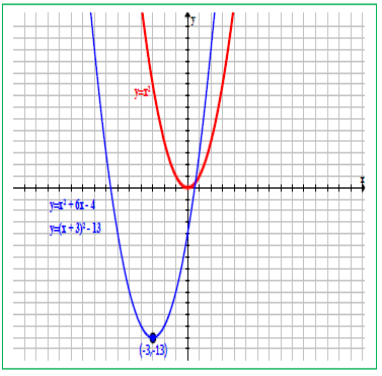
  La función viene dada de la forma $y=x^2+r\cdot x+s$, y queremos convertirla en $y=(x-q)^2+k$.

  $$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, donde ya nos aparece $x^2 + 6x$. Ahora tenemos que ajustar el resto:

  $$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y=x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).



En general, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $x=\frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Ejemplo:

- *En el caso anterior,* $y=x^2+6\cdot x-4$, *el vértice está en el punto (–3, –13).*

Como r = 6, la primera coordenada del vértice es $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Sustituyendo el valor en la expresión: $y=(-3)^2+6\cdot(-3)-4=9-18-4=-13$

2.3. Función cuadrática. Parábolas de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Las funciones polinómicas de segundo grado reciben el nombre de **funciones cuadráticas**.

Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y = x^2 + rx + s$, que es una parábola abierta hacia arriba, o $y = -x^2 + rx + s$, abierta hacia abajo.

Sabemos cómo afecta el valor del coeficiente a en la gráfica de la parábola $y = a \cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resueltas

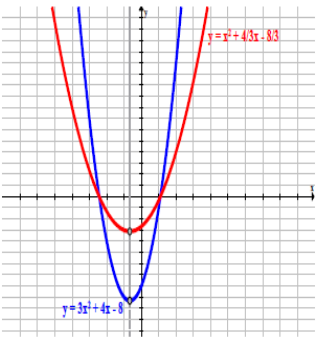
- *Representa la parábola* $y = 3x^2 + 4x - 8$:

  Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

  $$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

  y la comparamos con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

  $$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}.$$



  Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

  En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se puede ver en el punto 2.1.

En general, la representación de la función cuadrática $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se puede aproximar representando la parábola $y = x^2 + rx + s$, teniendo el vértice en el mismo punto de abscisa y la forma dependerá del valor absoluto del coeficiente a, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a > 0$
- hacia abajo si $a < 0$

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica en el plano cartesiano.

Coeficiente a:

Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$:

Habíamos visto que para la parábola de la forma $y=x^2+rx+s$, la primera coordenada es $\frac{-r}{2}$. (En este caso a es igual a 1). La parábola en el caso general es:

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, es decir, $r=\frac{b}{a}$, entonces la abscisa del vértice es $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa.

Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$.

Cuando $x=0$, la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto $(0, c)$.

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

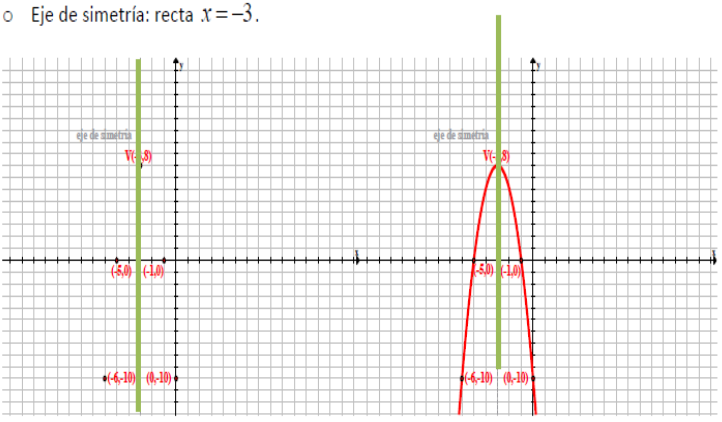
El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- *Determina los elementos de la parábola* $y=-2x^2-12x-10$
  - $a=-2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{12}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3,8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0) \end{cases}$
    - Eje OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot0^2-12\cdot0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

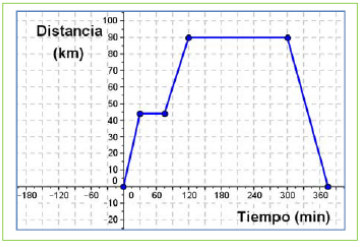
      La parábola también pasa por su simétrico: $(-6,-10)$.
  - Eje de simetría: recta $x=-3$.



4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hay gráficas que no podemos representar con una única fórmula, como la del margen:

Actividades resueltas



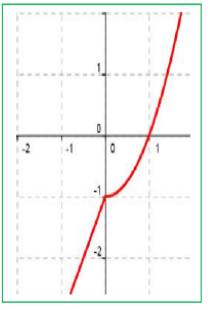
- *La gráfica del margen representa una excursión en autobús de un grupo de Personas Adultas de nivel II a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca una expresión que la represente.*

Este tipo de función se denomina **función definida a trozo**s pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: (0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30\\ 45 & si\ 30<x\le 75\\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120\\ 90 & si\ 120<x\le 300\\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360\end{cases}$$

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x^2-1 & si\ x\ge 0\end{cases}$.



Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados.

Actividades propuestas

11. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x-1 & si\ x>0\end{cases}$.

12. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & si\ x<0\\ 2x+2 & si\ x>0\end{cases}$.

13. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<1\\ x+3 & si\ x>1\end{cases}$.

4. APLICACIONES A CONTEXTOS Y SITUACIONES REALES

- ***Interpretación de prospectos. Cantidad de paracetamol. Interpolación***

Tenemos paracetamol para niños con una concentración de 100 mg/ml. El prospecto nos indica que la dosis recomendada es de 15 mg por kg de peso del niño cada 6 horas.

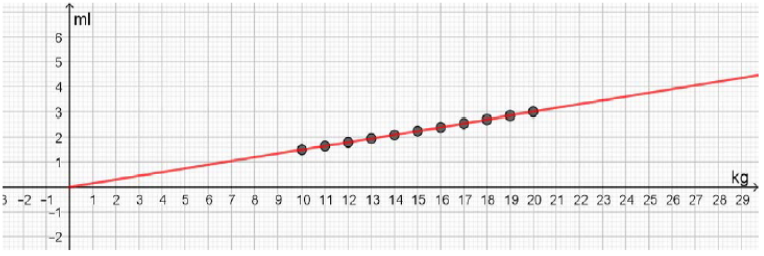
Llamamos a la variable kilogramos del niño y consideramos la función $f(x)$ que es la cantidad en *ml* de paracetamol que tenemos que administrar.

Como $15x$ es el número de mg y en 1 ml de nuestro frasco hay 100 mg entonces tenemos que administrar $\frac{15x}{100}\ ml$. Por lo tanto, la función viene dada por $f(x) = 0{,}15x$.

kg	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ml	1,5	1,65	1,8	1,95	2,1	2,25	2,4	2,55	2,7	2,85	3

Con la función definida a partir de la expresión $f(x) = 0{,}15x$ podemos calcular fácilmente la cantidad de mililitros exactamente para cualquier peso.

Por ejemplo, para un niño de 12,7 kg, la cantidad de mililitros es $f(12{,}7) = 1{,}905$ cada 6 horas.



- ***Interpretación de prospectos. Cantidad de ibuprofeno. Interpolación***

Leemos en el prospecto de una cierta marca de ibuprofeno para niños que viene en un frasco con concentración de 40 mg/ml que la dosis administrada de ibuprofeno depende de la edad y del peso del niño. Para niños de 3 meses hasta 12 años, la dosis diaria recomendada es de 20 a 30 mg por cada kg de peso, repartida en tres o cuatro tomas.

Llamamos x a la variable kg de peso del niño. Consideramos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que determinan las cantidades en ml mínima y máxima que deben administrarse **en total al día**.

Si se hace cada 6 horas, es decir, 4 tomas, entonces se divide la cantidad resultante entre 4.

Si se hace cada 8 horas, es decir, 3 tomas, entonces se divide la cantidad resultante entre 3.

$$\text{Por lo tanto, } f(x) = \frac{20x}{40}\ ,\ g(x) = \frac{30x}{40}\ .$$

Simplificando, $f(x) = 0{,}5x$, $g(x) = 0{,}75\ x$

Para 14,5 kg la dosis oscila entre $f(14,5)$ y $g(14,5)$, es decir entre 7,25 ml y 10,875 ml.

Al día

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	$f(x)$	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
máximo	$g(x)$	7,5	8,25	9	9,75	10,5	11,25	12	12,75	13,5	14,25	15

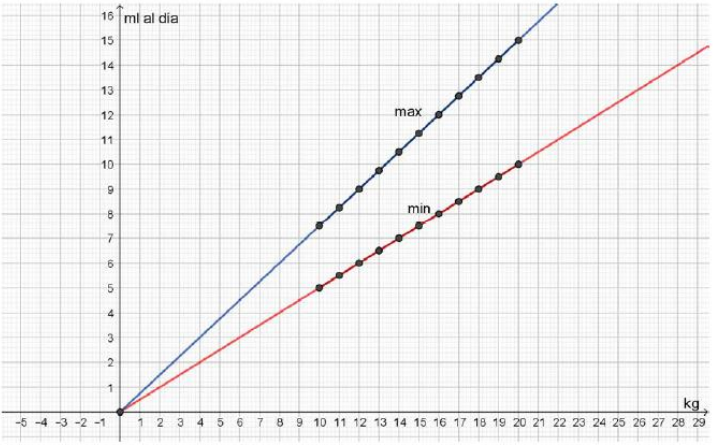
En 3 tomas

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	$f(x)/3$	1,67	1,83	2,00	2,17	2,33	2,50	2,67	2,83	3,00	3,17	3,33
máximo	$g(x)/3$	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5

En 4 tomas

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	$f(x)/4$	1,25	1,38	1,50	1,63	1,75	1,88	2,00	2,13	2,25	2,38	2,50
máximo	$g(x)/4$	1,88	2,06	2,25	2,44	2,63	2,81	3,00	3,19	3,38	3,56	3,75

Gráficas para la cantidad de ml en un día



Índice

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

1.1. SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO.
1.2. COORDENADAS. REPRESENTACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE PUNTOS.

2. TABLAS Y GRÁFICAS

2.1. RELACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES. TABLAS DE VALORES.
2.2. REPRESENTANDO PUNTOS. LAS GRÁFICAS.
2.3. GRÁFICAS A PARTIR DE SITUACIONES RELACIONADAS CON FENÓMENOS NATURALES Y DE LA VIDA COTIDIANA.
2.4. INTERPRETACIÓN Y LECTURA DE GRÁFICAS.

3. LAS FUNCIONES

3.1. LA FUNCIÓN COMO RELACIÓN ENTRE DOS VARIABLES. VARIABLE DEPENDIENTE Y VARIABLE INDEPENDIENTE.
3.2. LA FUNCIÓN: TABLA DE VALORES, GRÁFICA, EXPRESIÓN VERBAL Y EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

Resumen

El estudio de las relaciones entre dos magnitudes y su representación mediante **tablas y gráficas** es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos naturales y cotidianos que se relacionan de manera funcional.

René Descartes

En muchas ocasiones necesitaremos que los datos recogidos en una tabla sean representados gráficamente y utilizaremos el **sistema de referencia cartesiano**.

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés ***René Descartes*** *que vivió entre los años 1596 y 1650. Descartes quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «punto de partida» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, Descartes también comenzó tomando un "punto de origen" para poder representar la geometría plana.*

En este tema aprenderemos a utilizar el **lenguaje gráfico** para interpretar y describir situaciones del mundo que nos rodea. También estudiaremos las **funciones** entre dos magnitudes variables, en las que una tiene una relación de dependencia de la otra. *Descartes, Newton y Leibniz ya establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables.*

Así, los contenidos que vamos a tratar nos van a permitir trabajar con las distintas formas de representar algunas situaciones funcionales: numérica, gráfica, verbal o a través de una expresión algebraica (como las que acabamos de estudiar en el tema anterior) y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje.

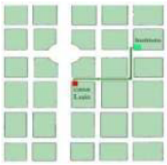
1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

1.1. Sistema de referencia cartesiano

Constantemente nos encontramos con situaciones en las que tenemos que indicar la localización de objetos o lugares respecto de otros conocidos y, en ocasiones, sus posiciones en un plano o mapa. Para entendernos es muy importante que tengamos una referencia común.

Si quieres indicar a unos amigos que no conocen tu barrio, dónde se encuentra una tienda determinada o la Escuela de Adultos donde estudias, bastará con que les indiques su posición con las referencias que utilicéis todos.

Ejemplo 1:



Luis vive en la casa marcada en rojo en el plano adjunto y estudia en un Instituto cercano marcado en verde en el plano.

Para indicar a sus amigos franceses donde está su Instituto les da las siguientes indicaciones:

"Al salir de mi casa vais hacia la derecha y cruzáis dos calles, luego hacia la izquierda cruzáis una calle y ya habéis llegado".

Las referencias izquierda y derecha así como la idea de cruzar una calle son comunes a todos nosotros, además fíjate que en el esquema la línea que indica el camino es muy clara.

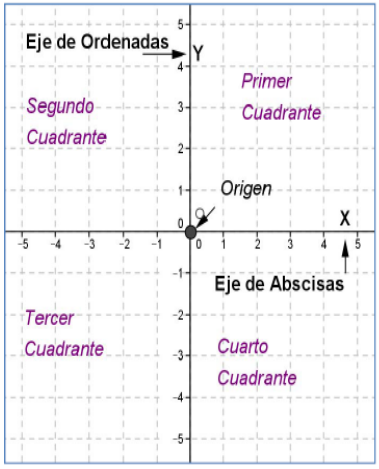
En Matemáticas, en la mayoría de las ocasiones, utilizamos sistemas de referencia cartesianos que también se utilizan en Ciencias Sociales para trabajar los mapas y los planos.

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas (ver *capítulo 4*) perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal le denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha.
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda.
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda.
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.

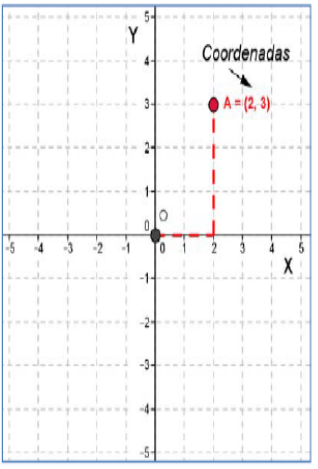


Sistema de referencia cartesiano

1.2. Coordenadas. Representación e identificación de puntos.

En las actividades anteriores hemos descrito cómo llegaríamos a algunos puntos a partir de un sistema de referencia. Para llegar a un punto, partiendo del Origen del sistema de referencia, hemos recorrido una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto quedará determinado por un par de números a los que llamaremos **coordenadas del punto**.

Las **coordenadas de un punto A** son un par ordenado de números (*x*, *y*), siendo *x* la primera coordenada que la llamamos **abscisa** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje vertical. La segunda coordenada es la *y*, llamada **ordenada** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal.



Cuando esta cantidad sea hacia la izquierda o hacia abajo la indicaremos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha la indicaremos con uno **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.

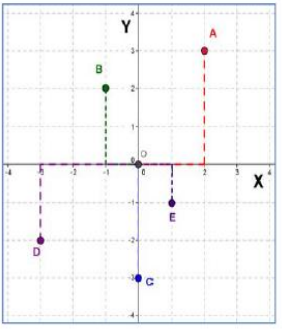
Ejemplo 3:

- En el gráfico el punto A tiene coordenadas (2, 3).

RAMO

Actividades resueltas

- Indica cuáles son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



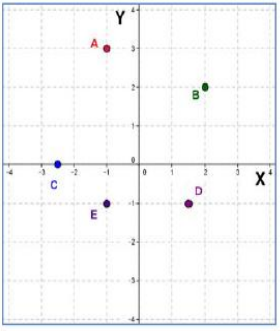
Solución

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) y E = (1, –1).

- Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2'5, 0), D = (1'5, –1) y E = (–1, –1).

Solución



3.1. La función como relación entre dos variables. Variable dependiente y variable independiente.

Una magnitud **Y** está **en función de**[18] otra magnitud **X**, si el valor de la magnitud **Y** depende de **manera única** del valor que tenga la magnitud **X**.

Una función es una relación entre dos magnitudes numéricas X e Y, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud X, le hace corresponder un único valor de la segunda magnitud Y.

En las relaciones funcionales, a las magnitudes relacionadas las llamamos *variables*.

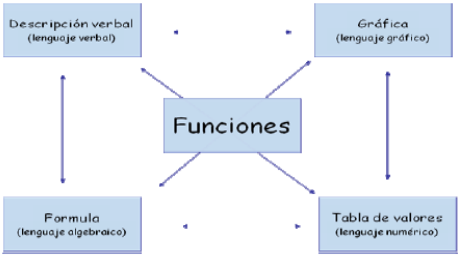
18 Nota: la Real Academia Española, en el Diccionario panhispánico de dudas, dice que **'en función de'** es una locución preposicional que significa **'según o dependiendo de'**.

Cuando tenemos dos magnitudes, X e Y, que están relacionadas de tal forma que Y es función de X, a la magnitud Y se la denomina variable dependiente, y a la magnitud X, de la que depende, se la denomina variable independiente. Ejemplo: y=2x

3.2. La función: tabla de valores, gráfica, expresión verbal y expresión algebraica

La gran mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta este momento son relaciones funcionales en las que hay dos variables, y una depende de la otra de manera única; esto es, son ***funciones***.

Además hemos visto que las ***funciones*** se pueden representar de varias maneras; como una ***descripción verbal*** que describe una situación, como una ***tabla de valores*** que nos indica los valores correspondientes de la relación, como una ***gráfica*** que nos visualiza la situación y como una ***expresión algebraica*** (fórmula) que nos relaciona las dos magnitudes.



Ejemplo 23:

- Si observamos el precio de la gasolina en un día concreto al llenar el depósito de un coche podemos estudiar la relación entre el número de litros de gasolina y lo que pagamos.

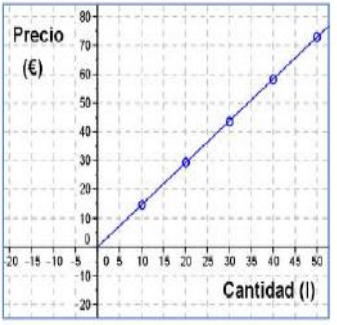
El precio que pagamos es función de la cantidad de gasolina que echamos y puede venir dada de las siguientes maneras:

- Descripción verbal: *"El litro de gasolina se situó en la primera semana de agosto en 1,46 €"*.
- Expresión algebraica (fórmula): $p = 1{,}46 \cdot l$ (donde p es el precio y l es la cantidad de gasolina).

- Tabla de valores:

Cantidad (l)	10	20	30	40	50
Precio (€)	14,60	29,20	43,80	58,40	73,00

- Gráfica:



Ejemplo 24:

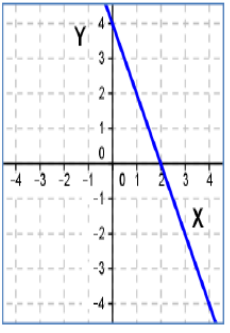
- Cuando tenemos una función que relaciona dos magnitudes que desconocemos, que las llamamos **X** e **Y**, la podemos tener definida por una fórmula (expresión algebraica).

Por ejemplo $y = 4 - 2 \cdot x$

De la que podemos elaborar una tabla de valores como la siguiente:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	–2	–4

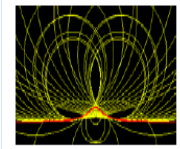
y, a partir de ella, dibujar una gráfica:



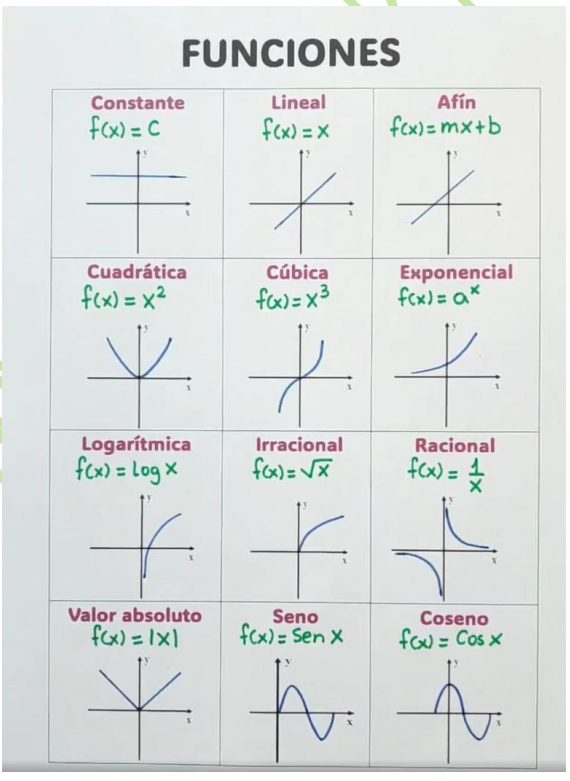
En este caso sí podemos unir los puntos, porque mediante su fórmula para cualquier valor ***x*** de la variable **X** podemos calcular el valor ***y*** de la variable **Y**.

Podríamos dar, también, una descripción verbal que defina la relación entre estas variables, por ejemplo: "*A cada número le corresponden cuatro unidades menos el doble del número*".

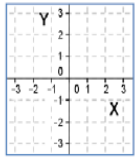
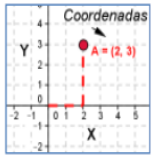
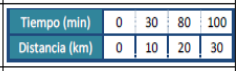
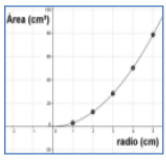
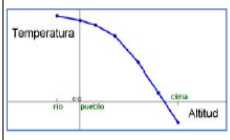
La Bruja de Agnesi



Existe una función que se llama la Bruja de Agnesi. María Gaetana Agnesi fue una matemática italiana que escribió un libro para que sus hermanos pudieran aprender matemáticas. ¡Eran 21 hermanos! Ese libro fue tan bueno, tan claro en sus explicaciones, que se usó durante mucho tiempo en las universidades de toda Europa. Para ello hubo que traducirlo. El traductor del italiano al inglés, que admiraba mucho a María Gaetana, hizo una mala traducción, y una de las funciones del libro apareció con el nombre de Bruja (en lugar de *versiera*). Desde entonces a esa función se la denomina "La Bruja de Agnesi".



RESUMEN

Sistema de referencia cartesiano	Dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **Ejes**, que se cortan en un punto llamado **Origen**. El eje horizontal se denomina **eje de abscisas**, y el eje vertical, **eje de ordenadas**.	
Coordenadas	Es un par ordenado de números (*x*, *y*), que nos indica donde se encuentra el punto respecto al sistema de referencia cartesiano que estamos utilizando.	
Tabla de valores	Tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.	
Gráfica	Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una gráfica.	
Gráficas a partir de situaciones	Una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica.	
Función	Una magnitud **Y** está en función de otra magnitud **X**, si el valor de **Y** depende de manera única del valor que tenga **X**.	La temperatura del agua **T** varía en función del calor recibido **Q**.
Variables	En las relaciones funcionales, a las magnitudes variables relacionadas las llamamos solamente variables.	*"El precio del kg de peras es 1,80 €."* El peso y el precio son las variables.
Variable dependiente e independiente	Cuando tenemos dos magnitudes variables que están relacionadas de tal forma que **Y** es función de **X**, a la magnitud **Y** se la denomina variable dependiente, y a la magnitud **X** se la denomina variable independiente.	*El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.* El consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente.
Variables y valores	Cuando tenemos una función entre dos variables **X** e **Y**, a los valores que toman estas variables les denominamos ***x*** e ***y*** respectivamente.	Cuando la magnitud **X** toma el valor ***x***, la magnitud **Y** vale ***y***.

NOCIONES SOBRE ANÁLISIS MATEMÁTICO II.

303

Límites y continuidad

Índice

1. CONCEPTO DE LÍMITE
   - 1.1. DEFINICIÓN
   - 1.2. LÍMITES LATERALES
   - 1.3. TIPOS DE LÍMITES
   - 1.4. ASÍNTOTAS
2. CÁLCULO DE LÍMITES
   - 2.1. OPERACIONES CON ∞ Y 0
   - 2.2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES
   - 2.3. PROCESO DE CÁLCULO DE LÍMITES
   - 2.4. INDETERMINACIONES
3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES
   - 3.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO
   - 3.2. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS
   - 3.3. TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Resumen

El concepto de límite es necesario para comprender todo el Análisis. En él se van a basar los conceptos que vamos a estudiar a continuación como continuidad y derivada de una función o como el concepto de integral.

Nos ayudará a mejorar el estudio de la gráfica de una función determinando sus asíntotas y sus ramas infinitas.

Ya sabes que la recta real puede ampliarse añadiendo dos símbolos nuevos, el $-\infty$ y el $+\infty$. Estudiaremos el comportamiento de las funciones cuando x tiende a $+\infty$ y cuando tiende a $-\infty$, es decir, cuando la variable independiente toma valores muy grandes, o muy pequeños (muy grandes en valor absoluto), y estudiaremos aquellos casos en los que la variable dependiente tiende a infinito.

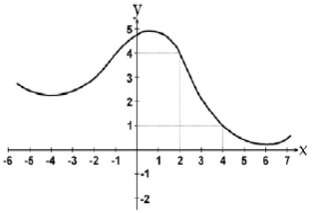
1. CONCEPTO DE LÍMITE

¿Qué es un límite?

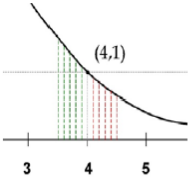
Límite: lo podemos definir como aquel lugar al que, si no llegamos, seremos capaces de acercarnos todo lo que queramos.

En sentido matemático, el límite de una función en un punto, tiene sentido de "***lugar***" hacia el que se dirige el valor de la función $f(x)$ cuando la variable independiente (x) se aproxima a un valor determinado.

Si tomamos la función del gráfico adjunto, cuando (x) se aproxima al valor **4**, el valor de la función $(f(x))$ se aproxima al valor **1**. Además, en este caso, no solo podremos acercarnos todo cuanto queramos, sino que llegamos a ese valor, puesto que el valor de la función para $x = 4$ es $f(x) = 1$.



Ampliando la gráfica de la función, en el entorno del punto (**4**, **1**), hemos dibujado los valores de $f(x)$ en el entorno de $x = 4$ y, como primera observación, vemos que nos podemos acercar al valor de $x = 4$ desde valores mayores a **4** (rojo) o menores a él (verde). En el primer caso diremos que nos aproximamos al valor de $x = 4$ por la **derecha** y, en el segundo caso, por la **izquierda**.



En ambos casos, podemos ver que el valor de $f(x)$ se aproxima a **1**, tanto como queramos, por la derecha desde valores menores a **1** (rojo), pero también lo podremos hacer, desde la izquierda, desde valores mayores a **1** (verde).

Por lo tanto, podemos intuir que, el límite de la función $f(x)$ es **1**, cuando el valor de la variable independiente x se acerca a **4** y se expresa de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 1$$

Actividades resueltas

- *Estima el valor de* $\lim_{x \to 2}(x^2 - 3)$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto $x = 2$.

x	3	2.5	2.1	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	6	3.25	1.41	1.2025	1.1616	1.1209	1.0804	1.0401	1.004001	1.00040001

x	1	1.5	1.7	1.9	1.95	1.97	1.98	1.99	1.999	1.9999
$f(x)$	−2	−0.75	−0.11	0.61	0.8095	0.8809	0.9204	0.9601	0.996001	0.99960001

Observa cómo, al aproximarnos los valores de la variable a 2, siendo mayor que 2: 3, 2.5, 2.1, … los valores de la función se aproximan a 1: 6, 3.25, 1.41, 1.2025, … 1.0401, 1.004001, 1.00040001 siendo siempre mayores que 1, mientras que al aproximarnos a 2, siendo menores que 2: 1, 1.5, … 1.99, 1.999, 1.9999 los valores de la función también se aproximan a 1, tanto como queramos, siendo ahora menores que 1: −2, −0.11, 0.61, …, 0.996001, 0.99960001.

Pretendemos escribir con rigor matemático la idea de "*aproximarse*" y "*estar cerca*", "*tanto como queramos*".

1.1. Definición

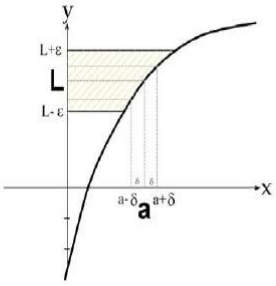
Se define, matemáticamente, el límite de una función, según la expresión:

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a es L, y se expresa:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Cuando:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Del gráfico anterior, se desprende que, cualquier punto x que pertenezca al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, salvo quizás el propio punto a (por ese motivo aparece en la definición es signo <, $0 < |x - a|$, para eliminar del entorno al punto a), su imagen siempre estará contenida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Y como lo podemos hacer para cualquier ε, entonces, podremos afirmar que L es el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a.

Actividades resueltas

- *Utiliza la definición de límite para comprobar que* $\lim_{x \to 2}(x^2) = 4$

La definición dice: para todo ε, por lo que elegimos un ε cualquiera, e imponemos:
$|f(x) - L| < \varepsilon \to |(x^2) - 4| < \varepsilon \to |x^2 - 4| = |(x-2)\cdot(x+2)| < |x-2|\cdot 2 < \varepsilon \to |x-2| < \sqrt{\varepsilon}$.
Basta tomar $0 < \delta < \sqrt{\varepsilon}$ para que se verifique si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(x^2) - 4| < \varepsilon$.

Actividades propuestas

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x \to 1} x = 1$.

Propiedades

Si existe $\lim_{x \to a} f(x)$, es único.

Si hubiera dos límites distintos bastaría tomar como ε un tercio de la distancia entre ambos límites para llegar a contradicción.

Como vimos antes, podemos acercarnos a a por la derecha o por la izquierda y, de ahí, obtenemos los **límites laterales**.

1.2. Límites laterales

Límite lateral por la derecha

El **límite lateral**, por la **derecha** de un punto, de la función $f(x)$. se expresa como:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

y se define como el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x > a$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < x - a < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Límite lateral por la izquierda.

El **límite lateral**, por la **izquierda** de un punto, de la función $f(x)$. se expresa como:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y se define como el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x < a$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < a - x < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Actividades resueltas

- *Estima el valor del límite a la derecha y el valor del límite a la izquierda de $x = 1$ en la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto $x = 1$. Para estimar el límite a la derecha nos aproximamos a 1, tanto como queramos, con valores mayores que 1, utilizando la rama de la función definida para valores mayores que 1, es decir: $3x - 2$:

x	2	1.5	1.1	1.05	1.04	1.03	1.02	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	4	2.5	1.3	1.15	1.12	1.09	1.06	1.03	1.003	1.0003

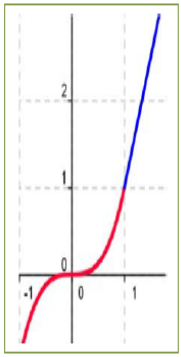
Observa cómo al aproximarnos a 1, siendo mayor que 1: 2, 1.5, ..., 1.001, 1.0001, los valores de la función se aproximan a 1, el valor del límite lateral por la derecha: 4, 2.5, ..., 1.003, 1.0003.

Para estimar el límite a la izquierda nos aproximamos a 1, tanto como queramos, con valores menores que 1, utilizando la rama de la función definida para valores menores que 1, es decir: x^3:

x	0	0.5	0.7	0.9	0.95	0.97	0.98	0.99	0.999	0.9999
$f(x)$	0	0.125	0.343	0.729	0.857375	0.912673	0.941192	0.970299	0.997003	0.99970003

Observa cómo al aproximarnos a 1, siendo menor que 1: 0, 0.5, ..., 0.999, 0.9999, los valores de la función se aproximan a 1, el valor del límite lateral por la izquierda: 0, 0.125, ..., 0.997003, 0.99970003.

En este caso ambos límites laterales coinciden. Observa la gráfica de la función:



Existencia de Límite

Para que una función $f(x)$ tenga límite en un punto $x = a$, es necesario y suficiente que existan los límites laterales y coincidan, es decir:

Dada una función $f(x)$ y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a es L si se verifica que:

1) Existen $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$

2) Son iguales: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Entonces decimos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Límites infinitos

La definición es la misma que en el caso finito, sustituyendo el entorno del punto $x = a$ por un entorno del infinito.

Dada una función $f(x): X \to \Re$, $X = [a, +\infty)$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a $+\infty$ es L, y se expresa: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe un $k > 0$ tal que, siempre que $x > k$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De forma análoga podemos definir cuando el punto se aproxima a $-\infty$.

Caso general: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k > 0$ tal que, si $|x| > k, x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En ocasiones, para un determinado valor de la variable independiente, $x = a$, el valor de la función crece tanto como se quiera en valor absoluto:

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\, k > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta, x \in X$, se cumple $|f(x)| > k$.

Observa que no nos estamos fijando en el signo de infinito.

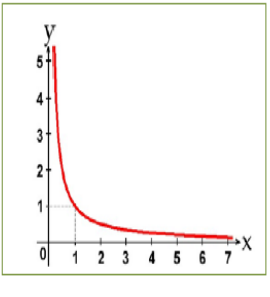
Dada una función $f(x): X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a $+\infty$, y se expresa: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Cuando para todo $k > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta, x \in X$, se cumple $f(x) > k$.

De forma análoga podemos definir cuando la función tiende a $-\infty$. Y también cuando el punto se aproxima a $+\infty$ y la función tiende a $+\infty$, cuando a $-\infty$...

Actividades resueltas

- *Observa la gráfica de la función y estima el valor del límite a la derecha de $x = 0$ y el límite cuando x tiende a $+\infty$.*



El límite a la derecha de $x = 0$ es $+\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, y el límite cuando x tiende a $+\infty$ observamos que es 0, que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Los tipos de límites que nos podremos encontrar dependerán de los valores que tomen, tanto la variable independiente (x), como la función. Así, tendremos:

1.3. Tipos de límites

Los tipos de límites que nos podremos encontrar dependerán de los valores que tomen, tanto la variable independiente (x), como la función. Así, tendremos:

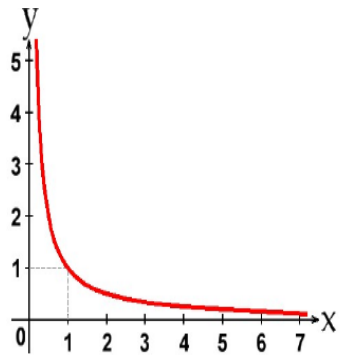
- **Valor del Límite** { Finito / Infinito
- **Valor** al que tiende la **variable independiente** { Finito / Infinito

Haciendo las combinaciones de ambos elementos, tendremos cuatro posibilidades:

		VALOR VARIABLE INDEPENDIENTE	
		FINITO	**INFINITO**
VALOR DEL LÍMITE	**FINITO**	$\lim_{x\to a} f(x) = L$	$\lim_{x\to \infty} f(x) = L$
	INFINITO	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

Actividades resueltas

- *Veamos algunos ejemplos de tipos de límites.*



Límite finito en punto finito

En este caso el valor del límite es finito cuando la variable independiente tiende a un valor finito.

En la función: $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to$ **1** el límite de la función es **1**:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Límite finito en punto infinito

En la función anterior, $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to \infty$, el límite es **0**:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Limite infinito en punto finito

En la misma función de la gráfica, $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando $x \to$ **0**, el límite tomará el valor ∞:

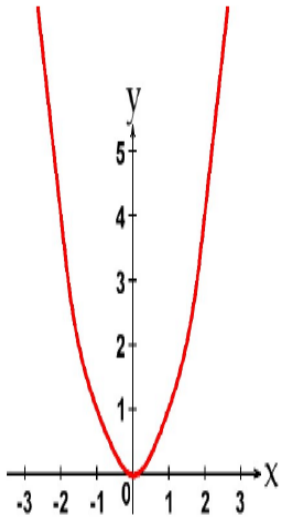
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Límite infinito en punto infinito

En el caso de valor de límite infinito cuando la variable independiente tiende a infinito, deberemos tomar otra función cualquiera que sea siempre creciente a partir de un valor.

Sea la función, $f(x)=x^2$. El límite de la función, cuando x tiende a ∞, toma el valor ∞:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty .$$



1.4. Asíntotas

Las asíntotas de una función (caso de existir) son rectas del plano a las que la función se aproxima tanto como queramos.

Puesto que, las asíntotas, son rectas del plano, podrán ser **horizontales**, **verticales** y **oblicuas**.

Asíntotas horizontales

Para que, una recta horizontal, sea asíntota de una función se debe cumplir la siguiente condición:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = K \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x) = K$$

Entonces decimos que $y = K$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$.

Asíntotas verticales

Para que, una recta vertical, pueda ser asíntota de una función, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$$

Entonces decimos que $x = a$ es una asíntota de $y = f(x)$. La recta $x = a$ es vertical.

Las posibles asíntotas verticales de una función estarán en los puntos de la función que no pertenezcan a su dominio y se debe cumplir que el límite de la función, cuando el valor de x tiende a ese punto, se hace muy grande en valor absoluto, es decir, tome el valor $\pm\infty$.

Asíntotas oblicuas

Para que una recta oblicua ($y = mx + n$) pueda ser asíntota de una función, deben existir, y ser finitos, los límites siguientes:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Ramas parabólicas

Pero en muchas ocasiones no hay ni asíntotas horizontales ni asíntotas oblicuas. Ya conoces bien, por ejemplo, la parábola $y = x^2$, que cuando x tiende a $+\infty$, o a $-\infty$ la función crece sin aproximarse a ninguna recta. Por simplificación, se dice en todos estos casos que hay una rama parabólica.

Actividades resueltas

- *La función:* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *tiene una asíntota horizontal,* $y = 0$ *y una asíntota vertical* $x = 0$.

Ya lo hemos visto en actividades anteriores.

- *Determina la asíntota oblicua, si existe, de la función:* $f(x) = \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$.

Calculamos el límite $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)} = 1$. Por tanto existe una asíntota oblicua de pendiente $m = 1$.

Calculamos la ordenada en el origen con el límite:

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x+4)\cdot(x-2) - x\cdot(x-1)}{(x-1)} \right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x^2+4x-2x-2) - (x^2-x)}{(x-1)} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{x-1} \right) = 3$$

Por tanto, la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua de la función.

- *Las funciones:* $f(x)=x^3$, $f(x)=(-x)^3$, $f(x)=x^4$, $f(x)=-x^4$, *tienen ramas parabólicas en su comportamiento en el infinito.*

Observa que $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, luego $f(x)=x^3$ tiene una rama parabólica.

$\lim_{x\to+\infty} (-x)^3=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} (-x)^3=+\infty$, luego $f(x)=(-x)^3$ tiene una rama parabólica.

$\lim_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} x^4=+\infty$, luego $f(x)=x^4$ tiene una rama parabólica.

$\lim_{x\to+\infty} -x^4=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} -x^4=-\infty$, luego $f(x)=-x^4$ tiene una rama parabólica.

- *Asíntotas de la función:* $f(x)=\dfrac{(x+4)}{(x-1)}$.

La función $f(x)=\dfrac{(x+4)}{(x-1)}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, pues para $x = 1$ la función no está definida, no pertenece a su dominio de definición, y el límite a la derecha y la izquierda, tiende a infinito.

Al analizar el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende a infinito, tanto a $+\infty$, como a $-\infty$, la función se acerca a 1, tiene una asíntota horizontal, $y = 1$.

2. CÁLCULO DE LÍMITES

Habrás observado que calcular límites utilizando la definición puede ser muy complicado. Por eso nos interesa obtener propiedades y encontrar procedimientos que nos permitan calcularlos con mayor soltura.

2.1. Propiedades de los límites

Para estudiar las operaciones con los límites vamos a suponer que f y g son dos funciones definidas sobre un mismo intervalo X y con valores en $\Re$. Cuando indicamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ pueden ser a y L tanto números reales como $\pm\infty$.

Respecto de la suma de funciones:

El límite de la suma de dos funciones, es igual a la suma de los límites de las funciones (siempre que la operación entre los límites esté definida y dichos límites existan), y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Análogo es para la resta de funciones.

Respecto del producto de funciones:

El límite del producto de dos funciones, es igual al producto de los límites de las funciones (siempre que dichos límites existan y la operación entre los límites esté definida), y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Un caso particular se presenta cuando una de las funciones es una constante, en ese caso, la expresión queda:

$$\lim_{x\to a}(K\cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

Respecto del cociente de funciones:

El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre que los límites existan, la operación entre los límites esté definida y que $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$$

Respecto de la potencia de funciones:

El límite de una potencia de funciones, es igual, en general, a la potencia de los límites de las funciones, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Analizaremos casos particulares en el cálculo de límites, como cuando el límite de la base sea 1, y el exponente tienda a infinito.

Un caso particular se presenta cuando una de las funciones es constante, en ese caso, la expresión es:

$$\lim_{x\to a}(f(x)^K) = (\lim_{x\to a} f(x))^K$$

Respecto de la composición de funciones:

El límite de la composición de funciones, es igual a la composición de los límites de las funciones, siempre que g sea continua en $f(x)$, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(g(f(x))) = g(\lim_{x\to a} f(x)) \text{ si } g \text{ es continua en } f(x).$$

2.2. Operaciones con ∞ y 0

Para poder calcular límites, debemos conocer previamente ciertas operaciones con ∞ y 0, y ciertas propiedades que tienen los límites respecto de algunas operaciones matemáticas como son la suma-resta, multiplicación-división, potencias, composición, etc.

Si sumamos, restamos, multiplicamos … dos números reales, no tenemos ningún problema para saber el resultado, pero ¿y si es el ∞? Observa la tabla siguiente y comprueba que en ocasiones sí sabemos el resultado, pero en otras, decimos "*indeterminado*" pues no lo sabemos de forma inmediata, debemos trabajar más para saberlo.

SUMA	PRODUCTO	COCIENTE	
$\infty \pm K = \infty$	$K \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{K} = 0$	$\frac{K}{0} = \infty$
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{K} = \infty$	$\frac{K}{\infty} = 0$
$\infty - \infty$ = Indeterminado	$0 \cdot \infty$ = Indeterminado	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
		$\frac{0}{0}$ = Indeterminado	$\frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminado

POTENCIAS		
$K^0 = 1$	$0^K = \begin{cases} 0 & si\ K \geq 0 \\ \infty & si\ K < 0 \end{cases}$	0^0 = Indeterminado
$0^\infty = 0$	$K^{+\infty} = \begin{cases} 0 & si\ 0 < K < 1 \\ +\infty & si\ K > 1 \end{cases}$	∞^0 = Indeterminado
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$e^{+\infty} = +\infty \quad e^{-\infty} = 0^+$	1^∞ = Indeterminado

Nota:

Indeterminado no significa que no pueda existir el límite, sino que será necesario realizar algunas operaciones previas para poder determinar si existe, y su valor.

2.3. Proceso de cálculo de límites

El proceso de cálculo de un límite consiste en sustituir la variable por el valor al que tiende y operar, obteniendo el resultado del límite que podrá ser un valor **finito**, **infinito** o **indeterminado**.

Actividades resueltas

- *Calcula los límites siguientes:*

Así, por ejemplo, podemos calcular los siguientes límites simplemente sustituyendo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+5x-3}{x+3}=\frac{(4)^2+5(4)-3}{(4)+3}=\frac{16+30-3}{7}=\frac{33}{7}$$

$$\lim_{x\to 7}\sqrt[2]{3x+2}=\sqrt[2]{3(7)+2}=\sqrt[2]{21+2}=\sqrt[2]{23}$$

El límite de $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ pues según vimos en las operaciones con ∞, al dividir un número por algo que tendía a ∞ se obtenía 0.

Como infinito no es un número real, cuando el límite tiende a infinito, decimos que no existe.

Los **límites laterales** de una función sólo existen cuando el valor hacia el que tiende la variable independiente sea siempre un valor finito, ya que si fuera +∞, no pueden existir valores a la derecha y si fuera −∞ no pueden existir valores a la izquierda. Por lo tanto, los **límites laterales** se podrán calcular cuando el valor de la **variable independiente** sea **finito**.

Para calcular los límites laterales procederemos a realizar un cambio de variable, de tal modo que, siempre nos movamos en valores al lado que queramos calcular. Así, si queremos estar a la derecha del valor al que tiende la variable independiente, le sumaremos siempre una cantidad que cada vez es más pequeña (que tiende a cero), con lo que nos aproximaremos al valor deseado. Por ejemplo, supongamos que la variable $x \to$ **4**, el cambio que deberemos hacer será x = **4** + h, con h > 0, tomando valores que tienden a cero.

Si, por el contrario, quisiéramos aproximarnos a **4** desde la izquierda, lo que deberemos hacer será restarle esa misma cantidad, cada vez más pequeña, con lo que nos aseguramos que tendemos al valor de cuatro desde valores inferiores a él.

Esto anterior, lo podemos expresar: $x \to a \equiv x = a \pm h$, con $h \to$ **0.** $\begin{cases} + \to derecha \\ - \to izquierda \end{cases}$

Actividades resueltas

- *Sea la función* $f(x) = x^2 + 5x - 3$ *y deseamos calcular los límites laterales cuando* $x \to$ **4.**

Calculamos el límite por la derecha, haciendo el cambio de variable x = **4** + h, con $h \to$ **0** y h > 0.

$$\lim_{x\to 4}(x^2+5x-3)=(4+h)^2+5(4+h)-3=\lim_{h\to 0}((16+8h+h^2)+(20+5h)-3)=$$
$$\lim_{h\to 0}(33+13h+h^2)=33+13\cdot 0+0^2=33$$

Calculamos el límite por la derecha, haciendo el cambio de variable x = **4** − h, con $h \to$ **0** y h > 0.

$$\lim_{x\to 4}(x^2+5x-3)=\lim_{h\to 0}(4-h)^2+5(4-h)-3=\lim_{h\to 0}((16-8h+h^2)+(20-5h)-3)=$$
$$\lim_{h\to 0}(33-13h+h^2)=33-13\cdot 0+0^2=33$$

Como ambos límites existen y son iguales, podemos decir que

$$\lim_{x\to 4}x^2+5x-3=33$$

2.4. Indeterminaciones

Como hemos visto en el apartado anterior, en algunas operaciones con ∞ y 0, no podíamos llegar a determinar el valor, puesto que resultaba una *indeterminación*. Existen algunos tipos de indeterminaciones que son resolubles haciendo operaciones y/o simplificaciones previas que estudiamos a continuación. Analizaremos como resolver cada caso de indeterminación.

Indeterminación $\infty - \infty$

Este tipo de indeterminaciones se pueden resolver haciendo operaciones con ambas funciones, ya que suelen ser del tipo $f(x) - g(x)$.

Actividades resueltas

- $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right]\to$ Indeterminado

Pero si hacemos operaciones y las sumamos previamente:

$$\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1-(x+2)}{x^2-4}=\frac{-x-1}{x^2-4}$$

Calculamos el límite de la función, y nos resulta

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{-x-1}{x^2-4}=\frac{-2-1}{2^2-4}=\frac{-3}{4-4}=-\infty$$

pues el denominador tiende a 0. Así: $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$; $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$;

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\left[\frac{1}{0}-\infty=\infty-\infty\right]\to$ Indeterminado

Como $tg(x)=\frac{senx}{\cos x}$, operando tendremos

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-senx}{\cos x}\right)=\left[\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\right]\to$ Indeterminado

Hemos pasado de una INDETERMINACION del tipo $\infty - \infty$, a otra del tipo $\frac{0}{0}$ que todavía no sabemos resolver.

Indeterminación $0 \cdot \infty$

Normalmente suelen darse en productos de funciones $f(x) \cdot g(x)$, donde $f(x) = 0$ y $g(x) = \infty$ Suelen resolverse operando y simplificando.

Actividades resueltas

- $\lim_{x \to -3} (x^2 + 6x + 9) \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right) = [0 \cdot \infty] \to$ Indeterminado

Si calculamos las raíces del polinomio $x^2 + 6x + 9$, obtenemos que $x = -3$ es una raíz doble, por lo que los factores del polinomio son $(x + 3)^2$ y sustituyéndolo en la ecuación nos queda

$$(x^2 + 6x + 9)\left(\frac{1}{x+3}\right) = (x+3)^2\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{(x+3)^2}{x+3}\right) = (x+3)$$

Calculamos, ahora, el límite de la función simplificada, y obtenemos:

$$\lim_{x \to -3} (x^2 + 6x + 9) \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right) = \lim_{x \to -3} (x+3) = -3 + 3 = 0$$

- El límite siguiente también es indeterminado (es decir, todavía no lo hemos determinado).

$$\lim_{x \to 2} (x-2) \cdot \left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right) \to \text{Indeterminado}$$

Si calculamos las raíces del polinomio $x^2 - x - 2$, obtenemos que son $x = -1$ y $x = 2$, por lo que los factores del polinomio son: $x^2 - x - 2 = (x + 1) \cdot (x - 2)$ y, sustituyéndolo en el límite, nos queda:

$$(x-2)\left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right) = (x-2) \cdot \left(\frac{1}{(x+1) \cdot (x-2)}\right) = \left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Calculamos, ahora, el límite de la función simplificada, y obtenemos:

$$\lim_{x \to 2} (x-2)\left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right) = \lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Indeterminación 0/0

Este tipo de indeterminaciones se producen porque existen algunos factores en el numerador y denominador que lo hacen cero y que será conveniente eliminar por algún método matemático. Para ello, debemos factorizar polinomios, multiplicar y dividir por el conjugado o cualquier otro procedimiento que nos permita eliminar la indeterminación.

Actividades resueltas

- Si retomamos el segundo ejemplo de las indeterminaciones $\infty - \infty$, donde operando habíamos llegado a una indeterminación de este tipo, que resolveremos a continuación:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-senx}{\cos x}\right)\left[=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\right]\rightarrow \text{Indeterminado}$$

Si multiplicamos, numerador y denominador, por el conjugado del numerador $(1+sen(x))$, obtenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-senx}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(1-senx)\cdot(1+senx)}{\cos x\cdot(1+senx)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(1-sen^2x)}{\cos x\cdot(1+senx)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x}{\cos x\cdot(1+senx)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{1+senx}\right)=\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+sen\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

- Si sustituimos valores en el siguiente límite, también es indeterminado, por lo que calculamos los factores de los polinomios del numerador y denominador, y simplificando lo posible, obtenemos:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$$

- Si sustituimos valores en el siguiente límite, también es indeterminado. Uno de los sumandos es una raíz, por lo que para quitar la indeterminación vamos a probar multiplicando por el conjugado:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{5+x}-2)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{5+x})^2-2^2)}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{5+x-4}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(\sqrt{5+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Indeterminación ∞/∞

Aunque pueden presentarse muchos casos, el más frecuente es el de cocientes de polinomios cuando la variable independiente tiende a ∞.

Así tendremos que $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty$

Luego $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una indeterminación del tipo ∞/∞.

Para resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario comparar el grado del polinomio del numerador con el grado del polinomio del denominador, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Si grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Si grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = K$

Si grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Para resolver este tipo de límites observamos que cuando la variable se hace muy grande el límite vendrá dado por los términos de mayor grado. Nos quedamos con ellos, y simplificamos.

Actividades resueltas

- **grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2+2x-4}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 8 = 8$$

Observa lo que ocurre si damos valores:

x	1	10	100	1000		−1	−10	−100	−1000
$f(x)$	1	7.77	8.01559	8.00195599		0.3333	7.3904	7.9756	7.99756

Se aproxima a 8 tanto a la derecha como a la izquierda.

- **grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2+2x-4}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 8 = 8$$

Observa lo que ocurre si damos valores:

x	1	10	100	1000		−1	−10	−100	−1000
$f(x)$	1	7.77	8.01559	8.00195599		0.3333	7.3904	7.9756	7.99756

Se aproxima a 8 tanto a la derecha como a la izquierda.

- **grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x-3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{1} = \infty$$

- **grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7}{4x^3+2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x} = 0\,.$$

En el caso de límites infinitos de cociente de polinomios podemos simplificar los cálculos pues hemos visto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \infty & si \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \end{cases}$$

Indeterminación 1^{∞}

Para poder resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario conocer el número e, que se define como: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718282$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ entonces $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \approx 2.718282$

Las soluciones de este tipo de indeterminaciones pasan, irremediablemente, por llegar a una expresión del tipo de la definición del número e. Observamos que es el límite de una potencia en la que la base tiende a 1, y el exponente tiende a infinito. Así, cuando al calcular un límite estemos en esa situación decimos que es un **límite tipo e**. Veamos algunos ejemplos.

Actividad resuelta

- *En el límite siguiente:* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1}$

La base tiende a 1, y el exponente a ∞ luego es un límite tipo e. Para resolverlo, primero completamos el primer 1 de la definición, y luego el segundo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2+2+1}{2x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1}$$

Luego hacemos el exponente igual al denominador para lo que multiplicamos y dividimos el exponente por el denominador del sumando de la base. Así, tendremos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}}$$

El límite de la base es e y el límite del nuevo exponente en este caso es 3, por lo que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{(2x+1)\frac{3}{2x-2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\lim_{x\to\infty}(2x+1)\frac{3}{2x-2}} = e^3$$

Este tipo de indeterminaciones, también se pueden resolver mediante la expresión:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Actividad resuelta

- No es un límite tipo e. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{2x+1}$

Calculamos los límites de la base: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ $\qquad \lim_{x\to\infty}(2x+1) = \infty$

Como $\frac{2}{3}$ es menor que 1, al multiplicarlo por sí mismo infinitas veces, el límite es 0.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{2x+1} = 0$$

Indeterminación $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

Este tipo de indeterminaciones exponenciales se resuelven mediante la aplicación de logaritmos neperianos (ln). Suponemos que el límite de estas indeterminaciones es

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = e^{L}$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad, tendremos

$$\ln\left(\lim_{x \to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} \right) = \ln(e^{L})$$

Y por propiedades de los límites y de los logaritmos se tiene:

$$\lim_{x \to a} \left(\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} (\ln(f(x))) = \ln(e^{L}) = L \cdot \ln(e) = L$$

Por tanto:

$$L = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} (\ln(f(x)) \text{ y } \lim_{x \to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{L}$$

RAM

3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Intuitivamente, podemos decir que una función es continua en un punto si somos capaces de pintarla, en ese punto, sin levantar el lápiz del papel, o si somos capaces de recorrerla con el dedo sin encontrarnos ningún obstáculo (saltos, indefiniciones, etc.). Pero la continuidad de una función se puede estudiar en un punto, en un intervalo o en todo su dominio de forma más precisa.

3.1. Continuidad de una función en un punto

En lenguaje matemático, la anterior definición simple, se complica un poco y lo expresamos así:

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a \in X$, se dice que la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si:

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - a| < \delta$, $x \in X$ se cumple que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esto lo podemos expresar diciendo que, si nos acercamos al punto a, entonces las imágenes de la función se aproximarán a la imagen de a. Si esto no ocurre, entonces, la función **no** será continua en $x = a$ y diremos que la función tiene una discontinuidad en $x = a$.

Observa que si comparas la definición de continuidad con la de límite, ahora el punto a debe pertenecer al intervalo X, mientras que en la de límite podía no ocurrir. Esta relación puede expresarse de la siguiente forma:

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ sí, y solo sí, se cumplen estas tres condiciones:

- Que para el punto $x = a$ exista $f(a)$.
- Que exista y sea finito el límite de la función para $x = a$, lo que implica que existan los límites laterales y coincidan.
- Que los dos valores anteriores coincidan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Bajo estas tres condiciones, la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

Continuidad de una función en un intervalo abierto

Para que una función sea continua en un intervalo abierto, la función debe ser continua en todos los puntos del intervalo.

Si lo fuera en todo el dominio, decimos que la función es continua.

Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

Las funciones polinómicas son continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es $x = 2$.

Estudio de la continuidad de la función en el punto $x = 2$:

Comprobemos, como primera medida, que la función está definida en $x = 2$.

Para $x = 2$, tenemos que determinar $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$, luego existe.

Calculamos, entonces los límites laterales de la función para $x = 2$.

Limite por la izquierda: $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$

Limite por la derecha: $\lim_{x \to 2} 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

Los límites laterales, existen, son finitos y coinciden.

Veamos si coincide, el límite de la función con el valor de la función en $x = 2$.

$$f(2) = 8 = \lim_{x \to 2} f(x)$$

Luego, como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x = 2$.

3.2. Propiedades de las funciones continuas

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas serán siempre continuas en su dominio.

Por lo tanto, presentarán discontinuidades en aquellos puntos en los que no esté definida y, por lo tanto, no pertenezcan a su dominio.

Operaciones de funciones continuas

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto $x = a$, entonces podemos afirmar que:

$f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.

$f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$, si $g(a) \neq 0$.

$f(g(x))$ es continua en $x = a$, si f es continua en $g(a)$.

Actividades resueltas

- Las funciones polinómicas son funciones continuas en todo $\Re$.

Basta comprobar que la función $f(x) = x$, la función $f(x) = a$ son funciones continuas para comprobar que cualquier función polinómica es suma y producto de estas funciones.

- Las funciones racionales son continuas en todo $\Re$ salvo para los valores que anulan al denominador. Estudia la continuidad de $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$.

En efecto, las funciones racionales son cociente de funciones polinómicas, que son continuas en toda la recta real. La función $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$ es continua en $\Re - \{2, -2\}$, pues el denominador se anula en dichos valores.

3.3. Tipos de discontinuidad

Existen varios tipos de discontinuidades de las funciones, que se expresan en el cuadro siguiente:

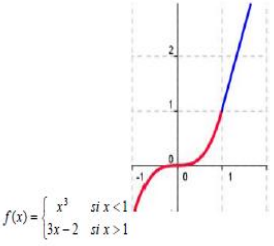
EVITABLES (Existen los límites laterales y son finitos e iguales)	No existe imagen $f(a)$ en el punto	
	La imagen $f(a)$ existe pero no coincide con los límites laterales	
INEVITABLES Los límites laterales no existen, bien porque alguno es infinito o porque son distintos, o alguno de los límites laterales no existe.	De primera especie	De salto finito (Límites laterales finitos pero distintos)
		De salto infinito (Alguno (o los dos) límites laterales son infinitos)
	De segunda especie	No existe alguno de los límites laterales.

Las **discontinuidades evitables**, se llaman así porque se pueden solventar mediante la redefinición de la función en el punto, bien porque no estuviera definida, bien porque no coincidiera la imagen con los límites laterales, que existen, coinciden y son finitos.

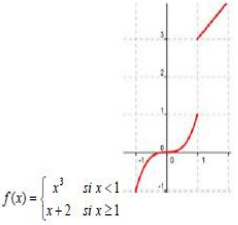
Las **discontinuidades inevitables** vienen dadas porque:

- los límites laterales existen, son finitos y no coinciden (de **primera especie** de salto finito). Salto es igual a $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$
- existen pero alguno es infinito (de primera especie de salto infinito). Salto infinito.
- o no existe alguno de los límites laterales o los dos (de **segunda especie**).

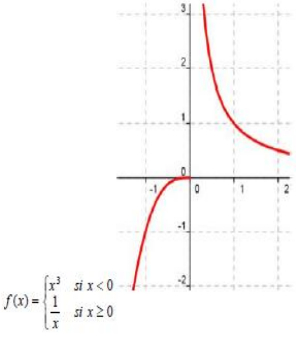
Discontinuidad evitable



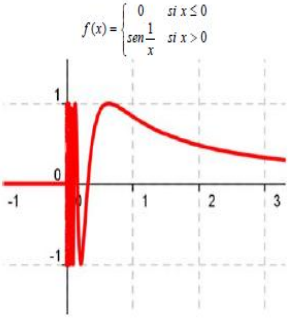
Discontinuidad de primera especie salto finito



Discontinuidad de primera especie salto infinito



Discontinuidad de segunda especie



Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de los ejemplos anteriores.*

Observa que la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x>1 \end{cases}$ no está definida en $x=1$.

Bastaría definir $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x\le 1 \\ 3x-2 & si\ x>1 \end{cases}$ para que la función fuese continua. Por tanto es una discontinuidad evitable en $x=1$ siendo la función continua en $\Re-\{1\}$.

La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ x+2 & si\ x\ge 1 \end{cases}$ tiene ambos límites laterales en $x=1$ y son finitos, pero distintos, por lo que tiene una discontinuidad de primera especie en $x=1$ de salto finito, con salto 2. Es una función continua en $\Re-\{1\}$.

La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<0 \\ \frac{1}{x} & si\ x\ge 0 \end{cases}$ tiene el límite a la derecha de 0, infinito, por lo que tiene en $x=0$ una discontinuidad de primera especie de salto infinito. La función es continua en $\Re-\{0\}$.

La función $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\le 0 \\ sen\frac{1}{x} & si\ x>0 \end{cases}$ no tiene límite a la derecha de 0. La función seno tiene fluctuaciones cada vez más juntas por lo que dicho límite no existe. Es una discontinuidad de segunda especie. La función es continua en $\Re-\{0\}$.

RAMO

El número e y el problema de *Bernoulli*

El número irracional *e* aparece con *John Napier* (Neper) que introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático (1614). Es la base de los logaritmos neperianos.

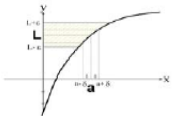
La primera aproximación al valor de este número se atribuye a *Jacob Bernoulli* (1654-1705) asociado al siguiente problema de interés compuesto:

Si se invierte un capital C con un interés del 100 % anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtiene un capital 2C. Si los intereses se pagan semestralmente, el capital se transforma en: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C = 2.25\ C$. *Si los intereses se pagan trimestralmente, se obtiene* $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdot C = 2.44\ C$. *En caso de pagos mensuales, el capital que se obtiene es* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \cdot C =$ 2.61 C y si *los pagos son diarios se consigue:* $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cdot C = 2.71\ C$.

Al aumentar la cantidad de períodos de pago el factor que multiplica al capital *C* se aproxima al número *e* = 2.7182818284...

$$e = lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

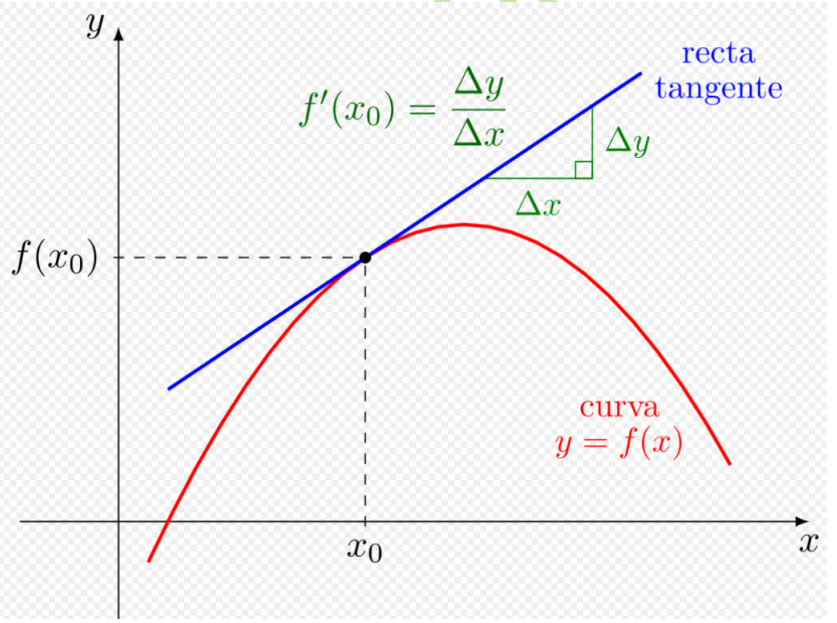
RESUMEN

Definición de límite	$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ⇔ Para todo ε > 0, existe un δ > 0 tal que, siempre que $\lvert x-a\rvert < \delta$, se cumple $\lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$.	
Límite lateral a la derecha	$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x > a$	La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<2 \\ 3x+2 & si\ x\geq 2 \end{cases}$ tiene de límite lateral a la izquierda 8, y de límite lateral a la derecha también 8, pues $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x\to 2} 3x+2 = 3\cdot 2+2 = 6+2 = 8$
Límite lateral a la izquierda	$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x < a$	
Existencia de límite	$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$	La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<2 \\ 3x+2 & si\ x\geq 2 \end{cases}$ tiene límite en $x = 2$
Asíntotas	Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = K$ hay una asíntota horizontal $y = K$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ hay una asíntota vertical $x = a$.	$f(x)=\frac{1}{x}$ → asíntota horizontal, $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$
Propiedades de los límites	Si existen los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces: $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$ $\lim_{x\to a}(K\cdot f(x)) = K\cdot \lim_{x\to a} f(x)$ $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $g(a)\neq 0$.	
Continuidad de una función en un punto	Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si para cualquier ε > 0, existe un δ > 0 tal que siempre que $\lvert x-a\rvert < \delta$, se cumple que $\lvert f(x)-f(a)\rvert < \varepsilon$.	La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<2 \\ 3x+2 & si\ x\geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$
Propiedades de las funciones continuas	La suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de funciones continuas es una función continua si no se anual el denominador.	Los polinomios son funciones continuas en $\Re$ $f(x)=\frac{1}{x}$ es continua en $\Re - \{0\}$
Tipos de discontinuidad	Evitable. De primera especie de salto finito. De primera especie de salto infinito. De segunda especie	$f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<2 \\ 3x+2 & si\ x>2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x)=\frac{1}{x}$ de primera especie con salto infinito en $x = 0$

INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS.

DERIVADAS E INTEGRALES: HERRAMIENTAS INVERSAS.

Una derivada es una herramienta matemática que nos describe el ritmo de cambio de cualquier función en un determinado punto o instante. Por eso se habla del valor de la derivada de una función en un punto dado. Esto sirve a una generalidad de usos en física, en ingeniería (rama que es la aplicación práctica de la física), arquitectura y otros muchos.



Autor: Cristian Quinzacara. Representación gráfica de una función. La derivada de la función en el punto marcado es equivalente a la pendiente de la recta tangente. Wikipedia.

Poniéndonos muy puristas, tiramos de definición y decimos:

"El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. La recta tangente es, a su vez, la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto".

A ver, estoy empezando a ponerme repelentemente abstracto, así que vamos a dar un ejemplo procedente de una rama de la física que se llama cinemática.

Nos salimos al balcón de casa y, sacando a pasear nuestra *vena macarra,* tiramos a la calle la horterada de jarrón que nos regaló la tía Romualda, las navidades pasadas. Eso sí, previamente, nos aseguramos de no darle en plena cabeza a ningún pobre peatón.

Hasta que la odiosa pieza de porcelana termine hecha añicos sobre la acera, en su camino hacia la perdición, el jarrón no sólo irá ocupando diferentes alturas respecto del tiempo, sino que, además, lo hará con una velocidad creciente, es decir que irá cayendo cada vez más rápido. Es decir, que tenemos dos elementos diferentes, íntimamente ligados entre sí, que son la velocidad y la aceleración.

RAMON FERRER I MARÍ

A esto se le define como *caída libre* que, en cinemática, es un caso particular del llamado *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*

Eso lo podemos describir como la altura respecto del tiempo, con la función: $\boldsymbol{y(t)}$ siendo $\boldsymbol{y}$ la altura y $\boldsymbol{t}$, el tiempo.

La **velocidad** $\boldsymbol{v}$ la describiremos con la derivada $\frac{dy}{dt}$ es decir, la derivada de la altura respecto del tiempo.

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Si queremos definir la **aceleración** $\boldsymbol{a}$, que es el ritmo del incremento de la velocidad a la que cambia la velocidad del jarrón respecto del tiempo, haremos la **segunda derivada** de la altura $\boldsymbol{y}$, es decir, volvemos a derivar respecto del tiempo. En otras palabras, es la segunda derivada de la altura y con respecto al tiempo t dos veces.

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Observando la expresión de la aceleración, esta también es definida como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

En el ejemplo físico del jarrón en caída libre la aceleración toma un valor constante de 9,8 m/s^2 y es conocida como aceleración de la gravedad.

RAMON FERRER I MARÍ

EL CÁLCULO DIFERENCIAL: DERIVADAS SIMPLES

En una derivada tenemos tres partes:

1) La **variable o incógnita**, que es una letra que se usa para representar un número.
2) El **exponente,** que indica cuantas veces debemos multiplicar un número por sí mismo.
3) El **coeficiente**, que es un factor multiplicativo, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica. Por ejemplo, $3x = x + x + x$, donde 3 es **coeficiente** de la variable x.

En una derivada la idea es hacer más pequeña una función en grado. Pero no lo podemos hacer por las bravas, hay que seguir unas reglas para lograrlo. Empecemos:

RAMON FERRER I MARÍ

Primer Caso: La función potencia más básica de todas

Sea x^3 que está compuesta por la variable o incógnita x, y el exponente 3 lo que significa que multiplicamos X por sí misma, tres veces, o sea: $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

Para hallar la derivada de la potencia x^3, el exponente 3 pasa a multiplicar a la x y luego el nuevo exponente de x disminuye una unidad.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

En general si tenemos una función $f(x) = x^n$ su derivada de denota como $f'(x)$ y se calcula según la siguiente expresión:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Más ejemplos de lo mismo:

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
x^2	$2x$
x^4	$4x^3$
x^6	$6x^5$
x^8	$8x^7$

Segundo caso: La función potencia viene acompañada de un número o coeficiente

En este segundo caso nos encontramos que la función viene acompañada de un coeficiente. Lo haremos prácticamente igual pasando el exponente a multiplicar a ese coeficiente y el grado del nuevo exponente disminuye en una unidad.

Sea $f(x) = 6x^5$ entonces,

$f'(x) = 5 \cdot 6x^{5-1} = 30x^4$

$f(x)$	$f'(x)$	
$3x^4$	$4 \cdot 3x^{4-1}$	$12x^3$
$5x^7$	$7 \cdot 5x^{7-1}$	$35x^6$
$4x^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{4} \cdot 4x^{\frac{1}{4}-1}$	$4x^{-\frac{3}{4}}$

RAMON FERRER I MARÍ

Tercer caso: Cuando tenemos solo la X, lo podemos ver como un caso particular y la derivada de X es igual a 1. Esto se deduce igualmente con la derivada de una potencia.

$$f(x) = x = x^1 \qquad f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Cuarto caso: La derivada de un número siempre es igual a 0. No importa si ese número es 5 o 5.000.000.000.000 (5 Billones). Se le llama "*CONSTANTE*", porque nunca cambia: Un 5 siempre es un 5, un 29 siempre es un 29. Se le representa como una "*C*" o una "K". El ¿por qué? lo veremos enseguida. De momento quedaos con este ejemplo:

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 5x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 5x^{1-1} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x - 5$$

Aquí es donde toca introducir un concepto llamado *Primitiva.* Y no, no estamos hablando de una mujer que perteneció al grupo evolutivo de los cromañones o de mi estimada, simpática e inteligentísima amiga, María Primitiva Sánchez Martínez, a quien la vida llevó a vivir al Principado de Asturias y a la que mando un cariñoso abrazo.

RAMON FERRER I MARÍ

A riesgo que algún matemático fundamentalista me parta la cara, dejo de lado la definición ortodoxa[19] (que cuesta Dios y ayuda entender a la primera) y paso a explicarlo en un castellano sencillito:

Si tenemos *varias* funciones que, al derivarlas, coinciden en el mismo resultado, a esas funciones las llamaremos *PRIMITIVAS*[20]*.* Y ahora veamos un par de ejemplos:

La derivada $\frac{dy}{dx} = 20x^3$ tiene varias funciones que, al derivarlas, nos dan esa misma derivada, a las que llamaremos primitivas.

DERIVADA $f'(x)$	FUNCIONES PRIMITIVAS $f(x)$
$20x^3$	$5x^4$
	$5x^4-7$
	$5x^4+2$
	$5x^4+30$

De manera que podemos definir una forma genérica de escribir a todas esas múltiples funciones que, al derivarlas, nos dan la derivada $20x^3$. Esa forma es:

$$f(x) = 5x^4+C$$

[19] Sea f(x) una función real de variable real definida en un intervalo cerrado [a, b]⊆R. Se llama función primitiva de f(x) a otra función F(x) cuya derivada es f(x) en dicho intervalo.

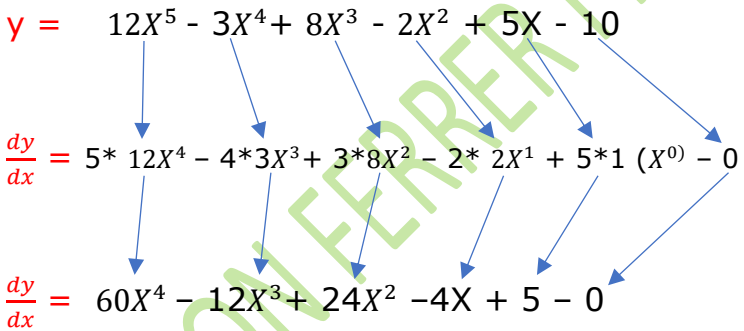
[20] SPOILER: A ese conjunto de primitivas se le llama INTEGRAL INDEFINIDA. Pero ya llegaremos a eso.

RAMON FERRER I MARÍ

Hecha esta importante aclaración, para explicar de dónde puñetas viene la constante C, volvamos a las derivadas.

MECÁNICA DE RESOLUCIÓN DE LAS DERIVADAS.

Vamos a resolver una derivada de manera lenta, que se vean todos los pasos que toca hacer para resolverla:



Y aunque con este aspecto está intrínsecamente correcta, por costumbre, cuando tenemos una constante (10, en este caso) cuya derivada es 0, éste 0 no se pone, con lo que el resultado final de la derivada, así en plan bonito, y con la ropa de los domingos, sería:

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$$

RAMÓN FERRER I MARÍ

Dudas de principiante: Si la derivada de un número es 0 ¿Por qué no eliminamos del resultado final el 5, además del 0? Pues precisamente por eso, porque el 5 final procede de derivar 5X. Ese 5 sólo desaparecerá si hacemos la segunda derivada, es decir, si derivamos la derivada que hemos obtenido.

Veámoslo:

1ª Derivada o derivada que hemos obtenido:
$60X^4$ – $12X^3$+ $24X^2$ –4X + 5

2ª Derivada: $60 * 4X^3$ – 12*3X^2+ 24*2X – 4.
$240X^3$ – 36X^2+ 48X – 4.

DERIVADAS CON FRACCIONES.

Las derivadas pueden incorporar fracciones. Por eso he invertido las cinco páginas anteriores en explicar cómo se usan.

Empecemos por una Derivada con una fracción en el exponente:

Sea $x^{3/4}$

- Primero, tenemos que pasar el exponente al coeficiente

$$\frac{3}{4} X$$

RAMON FERRER I MARÍ

- Segundo, hay que bajar en 1 grado el exponente:

$$\frac{3}{4} - 1$$

Pero ese 1 lo podemos expresar como $\frac{4}{4}$ por lo que si hacemos la resta de fracciones de igual denominador tenemos que:

$\frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = \frac{-1}{4}$ o lo que es lo mismo $-\frac{1}{4}$

Por lo que finalmente obtenemos:

$$x^{3/4} \rightarrow \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Más de lo mismo (paso a paso, como en el ejemplo anterior)

$x^{5/2} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

La Forma ágil es un atajo mental: No olvidemos que estamos haciendo una resta de fracciones de igual denominador, por lo que conservaremos abajo el denominador (2), mientras que arriba restaremos el numerador (5) menos el denominador (2).

RAMON FERRER I MARÍ

$\frac{a}{b}$ $\frac{a-b}{b}$ ➡ $x^{5/2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$

Otro ejemplo (ya lo hemos visto en la página 16 y aquí lo aplicaremos al coeficiente).

Sea $3\,x^{2/3}$

Primer paso: transladamos el exponente original al coeficiente y lo multiplicamos por el número que hay, que es un 3.

$3 * \frac{2}{3}\,x^{?}$ ➡ $3 * \frac{2}{3}\,x^{?}$ ➡ $2\,x^{?}$

Segundo paso: reducimos el exponente, que es $2 / 3$ respetando el denominador y $\frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$ y lo incorporamos a la derivada en el exponente.

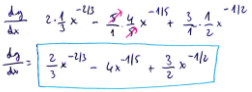
El resultado final nos quedará así

$2\,x^{-1/3}$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.

$y = 2x^{1/3} - 5x^{4/5} + 3x^{1/2}$

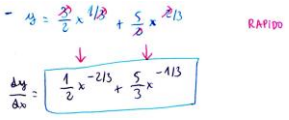


RAMON FERRERI MARÍ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-2/3} - 4x^{-1/5} + \frac{3}{2}x^{-1/2}$$

Ejercicio 2.

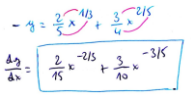
$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-2/3} + \frac{5}{3}x^{-1/3}$$

Ejercicio 3.

$$y = \frac{2}{5}x^{1/3} + \frac{3}{4}x^{2/5}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{15}x^{-2/3} - \frac{3}{10}x^{-3/5}$$

La siguiente tabla muestra las leyes de exponentes Las igualdades van en los dos sentidos, es decir, podemos aplicarlas de izquierda a derecha, como de derecha a izquierda:

RAMON FERRER I MARÍ

1	$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5	$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7	$(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$	$(2 \, x \, 3)^2 = 2^2 \, x \, 3^2$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Fuente: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

Vamos a trabajar con las siguientes:

2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

Si te estás preguntando el ¿por qué? de este inciso, es muy sencillo: No siempre te vas a encontrar la derivada, limpia de polvo y paja, lista para que la puedas derivar, como un señor/a.

Muchas veces te vas a encontrar con un auténtico "***morlaco"*** (Toro de lidia, de gran tamaño, fiero y con unos cuernos enormes) matemático de este calibre:

$$Y = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$$

Y a ver cómo lo "*toreas*" …

Que no cunda el pánico. El secreto consiste en que, antes de empezar a derivar, debemos de someterlo a una serie de "*arreglos previos*", como cuando una mujer se compra un vestido bonito, pero lo lleva a la modista a que se lo arregle, de aquí y de allá, para que le ajuste como un guante y sea la más guapa de la fiesta.

Volviendo al *morlaco matemático,* vamos a *torearlo*:

Fuente: Diario ABC. El torero José Tomás brindando el toro al respetable, en la Feria de Jerez ∎

Como ya he dicho antes, lo primero es "*arreglar*" la función para poder derivarla y para ello nos apoyaremos en las leyes de exponentes:

PEDRO FERRERIA MARÍ

Paso 1: Arreglamos

$x\sqrt{x}$

Usando $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ nos queda

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2}$

Luego usando $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$

Paso 2: Arreglamos $-\frac{2}{x^2}$ usando $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pero a la inversa (de derecha a izquierda) y nos queda:

$-\frac{2}{x^2} = -2x^{-2}$

Nota importante: Aunque la formula, en genérico, habla de $\frac{1}{a^n}$ ese 1 no es inamovible y, de hecho, toca cambiarlo por la cifra que aparezca en el numerador, tal y como hemos hecho ya.

El + 5 no hay que arreglarlo, así que no lo tocamos y nos queda:

$y = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + 5$

Esta función ya se puede derivar fácilmente con lo visto hasta ahora.

$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - (-2) \cdot 2x^{-2-1} + 0$

$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-3}$

RAMON FERRER I MARÍ

En este punto nuevamente podemos aplicar las funciones inversas $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ y $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ quedando así la derivada:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{x^3}$$

Vamos ahora con la "*segunda función de la tarde*", que tiene este aspecto:

$$y = \frac{\sqrt{x^3}}{2x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 2x\sqrt[3]{x}$$

Como podéis ver, esta función necesita más arreglos que el traje de comunión de Tarzán, así que vamos al lío:

Paso 1: Arreglamos $\frac{\sqrt{x^3}}{2x}$

Usando: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

y: $\frac{\sqrt{x^3}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x}$

Usando: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

RAMON FERRER I MARÍ

$$\frac{\sqrt{x^3}}{2x} = \frac{x^{3/2}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot x^{-1} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-1}}{2}$$

Por último, usando $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{2x} = \frac{x^{3/2}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot x^{-1} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-1}}{2} = \frac{x^{\frac{3}{2}-1}}{2} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

Paso 2: Arreglamos $\frac{5}{\sqrt{x}}$

Usando $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicando: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = 5 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 5x^{-\frac{1}{2}}$$

Paso 3: Arreglamos $2x\sqrt[3]{x}$

Usando $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$$2x\sqrt[3]{x} = 2x \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

Utilizando $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$2x\sqrt[3]{x} = 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot x^{1+\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{4}{3}}$$

RAMON FERRER I MARÍ

Luego:

$$y = \frac{\sqrt{x^3}}{2x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 2x\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{4}{3}}$$

Y su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{4}{3}\cdot 2x^{\frac{4}{3}-1}$$

Terminamos las operaciones y nos queda finalmente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

Y si aplicamos nuevamente las funciones inversas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x^3}} + \frac{8\sqrt[3]{x}}{3}$$

RAMON FERRER I MARÍ

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN SIMPLE QUE ESTÁ DIVIDIDA POR UN NÚMERO.

En este caso, tenemos dos vías diferentes:

a) DERIVAR DIRECTAMENTE TODA LA FUNCIÓN SIMPLE (NUMERADOR) RESPETANDO EL NÚMERO DEL DENOMINADOR: LO QUE SALGA, SE DEJA COMO ESTÁ.
b) INDIVIDUALIZAR CADA TÉRMINO DE LA FUNCIÓN SIMPLE COMO UNA FRACCIÓN E IRLO DERIVANDO: A LO QUE SALGA, SE LE APLICA LA NORMA DE REDUCIR LA FRACCIÓN A SU MENOR EXPRESIÓN.

Veamos un ejemplo

$$f(x) = \frac{9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6}{3}$$

La función está dividida por una constante igual a 3 o también se puede ver como que la función está multiplicada por una constante igual a 1/3. Esto es:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6)$$

Cuando se trata de calcular derivadas que están multiplicadas o divididas por una constante, esta queda igual y se deriva la función variable.

RAMON FERRER I MARÍ

La derivada sería:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx}(9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot 9x^{4-1} - 3 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 7x^{2-1} - 2x^{1-1} + 0)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (36x^3 - 9x^2 + 14x - 2)$$

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA QUE ESTÁ DIVIDIDA POR UN NÚMERO.

Aquí la cosa ya se complica, ya que pasamos de una función simple, por ejemplo

$$g(x) = \frac{3x + 1}{2}$$

A una función compuesta como

$$f(x) = \frac{(4x + 1)^2}{3}$$

Y aquí la cosa cambia como de la noche al día. Ya no podemos operar directamente, sino que necesitamos tirar de una fórmula específica para ello. Esta fórmula es:

$$du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$$

RAMON FERRER MARÍ

A esta fórmula se le llama "Regla de la Cadena" y es una de las 4 reglas de derivación que veremos luego.

Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=aVNa-J8iB5I
Ing E Darwin

REGLAS DE DERIVACIÓN: POTENCIA, CADENA, PRODUCTO Y DIVISIÓN O COCIENTE

Derivada de una potencia

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Sea $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$

Entonces

$f'(x) = 3 \cdot 4x^{3-1} - 1 \cdot 2x^{1-1} + 0 = 12x^2 - 2x^0$ $a^0 = 1$

$f'(x) = 12x^2 - 2$

Regla de la cadena

$du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$

Es una regla muy importante. La regla de la cadena casi siempre funciona cuando tenemos un paréntesis con una operación por fuera (Exponencial, seno, coseno, logaritmo, potencia, …).

RAMON FERRER I MARÍ

Dicho de una manera más fácil es multiplicar la derivada de lo de afuera por la derivada de lo de adentro.

$f(x) = (2x - 8)^4$

Comparando con la ecuación general de la regla de la cadena:

$u = 2x - 8 = 2$

$f'(x) = 4 \cdot (2x - 8)^{4-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x - 8) = 4 \cdot (2x - 8)^3 \cdot 2$

$f'(x) = 8 \cdot (2x - 8)^3 = 8 \cdot 2^3 \cdot (x - 4)^3$

$f'(x) = 64\,(x - 4)^3$

Derivada de un Producto

$$f = u \cdot v \qquad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$f(x) = (2x^3 + 5x)(-x^5 + 3x^2)$

Esta función es de la forma $f = u \cdot v$ donde:

$u = 2x^3 + 5x$

$v = -x^5 + 3x^2$

Luego las derivadas de u y v son:

$u' = 6x^2 + 5$

$v' = -5x^4 + 6x$

Sabemos que $f(x)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$f'(x) = (6x^2 + 5)(-x^5 + 3x^2) + (2x^3 + 5x)(-5x^4 + 6x)$$

RAMON FERRER I MARÍ

Derivada de un cociente

$$f = \frac{u}{v} \qquad f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{-x^5 + 3x^2}$$

Esta función es de la forma $f = \frac{u}{v}$ donde:

$u = 2x^3 + 5x$

$v = -x^5 + 3x^2$

Luego las derivadas de u y v son:

$u' = 6x^2 + 5$

$v' = -5x^4 + 6x$

Sabemos que $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 5)(-x^5 + 3x^2) - (2x^3 + 5x)(-5x^4 + 6x)}{(-x^5 + 3x^2)^2}$$

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN CON RAICES

No os asustéis, parecen más difíciles de lo que en realidad son. Primero recordemos un poco la mecánica básica de la operación con raíces:

6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

RAMON FERRER I MARÍ

3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Sea $y = \sqrt{2x+1}$ podríamos tirar de la Regla de la Cadena, aplicando las fórmulas de exponentes que tenemos y nos saldría

$$y' = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2+0)$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Finalmente

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

A ver, lo que hemos hecho está intrínsecamente bien, lo que pasa es que algún matemático inteligente, le dio a la sesera a base de bien y encontró un atajo, la mar de apañado, en forma de fórmula, tal que así:

$$d\sqrt{v} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot dv$$

Así que volvemos a la raíz del ejemplo anterior, que era

$$y = \sqrt{2x+1}$$

RAMON FERRER I MARÍ

Y aplicando la nueva fórmula tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Como podemos ver es la mitad de pasos más corto y directo. Veamos otro ejemplo.

$$y = \sqrt{7x^2 + 2x - 3}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} \cdot \frac{d}{dx}(7x^2+2x-3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} \cdot 14x + 2$$

$$y' = \frac{14x+2}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} = \frac{2(7x+1)}{2\sqrt{7x^2+2x-3}}$$

$$y' = \frac{(7x+1)}{\sqrt{7x^2+2x-3}}$$

Un ejemplo más Sea y= $\sqrt{9x^2}$+10x-2

$$y = \sqrt{9x^2 + 10x - 2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{9x^2+10x-2}} \cdot (18x+10) = \frac{2(9x+5)}{2\sqrt{9x^2+10x-2}}$$

$$y' = \frac{9x+5}{\sqrt{9x^2+10x-2}}$$

RAMON FERRER I MARÍ

LA TABLA DE LAS DERIVADAS.

La **tabla de derivadas** es un listado con las derivadas que más se utilizan y que, por lo tanto, son importantes de recordar. De modo que la tabla de derivadas ayuda a memorizar todas las fórmulas de las derivadas.

Índice

1. Tabla de derivadas inmediatas
2. Tabla de derivadas compuestas
3. Tabla de derivadas trigonométricas
4. Tabla de operaciones con derivadas
5. Tabla de derivadas completa

1. Tabla de derivadas inmediatas

A continuación, puedes ver la tabla de derivadas de las funciones más elementales. En la tabla también puedes ver un ejemplo resuelto de cada tipo de derivada para que te ayude a comprender cómo se hace la derivada de la función.

Solo añadir que este tipo de derivadas también se conocen como derivadas directas.

En esta tabla de derivadas se incluye la derivada de una constante, la derivada de una función lineal, la derivada de una potencia, la derivada de una raíz, la derivada de una función exponencial y la derivada de una función logarítmica, entre otras.

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = 7x \rightarrow f'(x) = 7$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 4^x \rightarrow f'(x) = 4^x \cdot \ln(4)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \log_5(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(5)}$
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$	$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

2. Tabla de derivadas compuestas

Las derivadas compuestas son como las derivadas inmediatas, pero aplicando la regla de la cadena.Como puedes ver, las fórmulas de las derivadas compuestas son como las inmediatas, pero multiplicando luego por la función de «dentro».

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$f(x)=9 \rightarrow f'(x)=0$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$	$f(x)=-3x \rightarrow f'(x)=-3$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$f(x)=(x^2-6)^3 \rightarrow f'(x)=3(x^2-6)^2\cdot 2x$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\sqrt{5x^3} \rightarrow f'(x)=\dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}}$
$f(x)=\sqrt[n]{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$f(x)=\sqrt[3]{7x-1} \rightarrow f'(x)=\dfrac{7}{3\sqrt[3]{(7x-1)^2}}$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=e^u\cdot u'$	$f(x)=e^{3x} \rightarrow f'(x)=e^{3x}\cdot 3$
$f(x)=a^u$	$f'(x)=a^u\cdot \ln(a)\cdot u'$	$f(x)=4^{x^3-1} \rightarrow f'(x)=4^{x^3-1}\cdot \ln(4)\cdot 3x^2$
$f(x)=\ln(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u}$	$f(x)=\ln(9x^2+3x) \rightarrow f'(x)=\dfrac{18x+3}{9x^2+3x}$
$f(x)=\log_a(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u\cdot \ln(a)}$	$f(x)=\log_7(4x) \rightarrow f'(x)=\dfrac{4}{4x\cdot \ln(7)}$
$f(x)=\text{sen}(u)$	$f'(x)=\cos(u)\cdot u'$	$f(x)=\text{sen}(x^4) \rightarrow f'(x)=\cos(x^4)\cdot 4x^3$
$f(x)=\cos(u)$	$f'(x)=-\text{sen}(u)\cdot u'$	$f(x)=\cos(5x^2) \rightarrow f'(x)=-\text{sen}(5x^2)\cdot 10x$
$f(x)=\tan(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2(u)}=(1+\tan^2(u))\cdot u'$	$f(x)=\tan(10x) \rightarrow f'(x)=\dfrac{10}{\cos^2(10x)}$

3. Tabla de derivadas trigonométricas

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = \text{sen}(u)$	$f'(x) = \cos(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sen}(x^6) \rightarrow f'(x) = \cos(x^6) \cdot 6x^5$
$f(x) = \cos(u)$	$f'(x) = -\text{sen}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cos(6x^4) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(6x^4) \cdot 24x^3$
$f(x) = \tan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2(u)} = (1 + \tan^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tan(2x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{4x}{\cos^2(2x^2)}$
$f(x) = \sec(u)$	$f'(x) = \frac{u' \cdot \text{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x) = \sec(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot \text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}$
$f(x) = \text{cosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u' \cdot \cos(u)}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x) = \text{cosec}(x^5) \rightarrow f'(x) = -\frac{5x^4 \cdot \cos(x^5)}{\text{sen}^2(x^5)}$
$f(x) = \text{cotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x) = \text{cotg}(5x^2) \rightarrow f'(x) = -\frac{10x}{\text{sen}^2(5x^2)}$
$f(x) = \text{arcsen}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \text{arcsen}(7x) \rightarrow f'(x) = \frac{7x}{\sqrt{1-(7x)^2}}$
$f(x) = \arccos(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \arccos(3x) \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$f(x) = \arctan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = \arctan(6x) \rightarrow f'(x) = \frac{6}{1+(6x)^2}$
$f(x) = \text{arcsec}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arcsec}(2x) \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x \cdot \sqrt{(2x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arccosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arccosec}(5x) \rightarrow f'(x) = -\frac{5}{5x \cdot \sqrt{(5x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arccotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = \text{arccotg}(x^2-1) \rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f(x) = \text{senh}(u)$	$f'(x) = \cosh(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{senh}(x^3-2x) \rightarrow f'(x) = \cosh(x^3-2x) \cdot (3x-2)$
$f(x) = \cosh(u)$	$f'(x) = \text{senh}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cosh(3x^2) \rightarrow f'(x) = \text{senh}(3x^2) \cdot 6x$
$f(x) = \tanh(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cosh^2(u)} = (1 - \tanh^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tanh(3x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{9x^2}{\cosh^2(3x^3)}$
$f(x) = \text{sech}(u)$	$f'(x) = -\text{sech}(u) \cdot \tanh(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sech}(8x) \rightarrow f'(x) = -\text{sech}(8x) \cdot \tanh(8x) \cdot 8$
$f(x) = \text{cosech}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}(u) \cdot \text{cotgh}(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{cosech}(x^2) \rightarrow f'(x) = -\text{cosech}(x^2) \cdot \text{cotgh}(x^2) \cdot 2x$
$f(x) = \text{cotgh}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}^2(u)$	$f(x) = \text{cotgh}(11x) \rightarrow f'(x) = -\text{cosech}^2(11x) \cdot 11$
$f(x) = \text{arcsenh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$f(x) = \text{arcsenh}(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{(3x)^2+1}}$
$f(x) = \text{arccosh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arccosh}(7x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{\sqrt{(7x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arctanh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = \text{arctanh}(3x-1) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{1+(3x-1)^2}$
$f(x) = \text{arcsech}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \text{arcsech}(9x^3) \rightarrow f'(x) = -\frac{27x^2}{9x^2 \cdot \sqrt{1-(9x^3)^2}}$
$f(x) = \text{arccsch}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1+u^2}}$	$f(x) = \text{arccsch}(10x) \rightarrow f'(x) = -\frac{10}{10x \cdot \sqrt{1+(10x)^2}}$
$f(x) = \text{arccoth}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = \text{arccoth}(6x^5) \rightarrow f'(x) = \frac{30x^4}{1-(6x^5)^2}$

4. Tabla de operaciones con derivadas

En este apartado tienes la tabla de derivadas con las operaciones que se pueden hacer con las funciones, esto es, la derivada de una suma, la derivada de una resta, la derivada de un producto y la derivada de un cociente.

Operación	Derivada	Ejemplo
$f(x)=k\cdot u$	$f'(x)=k\cdot u'$	$f(x)=7x^4 \rightarrow f'(x)=7\cdot 4x^3=28x^3$
$f(x)=\frac{k}{u}$	$f'(x)=\frac{-k\cdot u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{3}{4x} \rightarrow f'(x)=\frac{-3\cdot 4}{(4x)^2}=\frac{-12}{16x^2}$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=5x^2+4x \rightarrow f'(x)=10x+4$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=x^3-6x^2 \rightarrow f'(x)=3x^2-12x$
$f(x)=u+v-w$	$f'(x)=u'+v'-w'$	$f(x)=x^4+\text{sen}(2x)-e^{5x} \rightarrow f'(x)=4x^3+2\cos(2x)-5e^{5x}$
$f(x)=u\cdot v$	$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$	$f(x)=x^5\cdot\text{sen}(9x) \rightarrow f'(x)=5x^4\cdot\text{sen}(9x)+x^5\cdot 9\cos(9x)$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{x^2-3}{x^5} \rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot x^5-(x^2-3)\cdot 5x^4}{(x^5)^2}$

5. Tabla de derivadas completa

A modo de resumen aquí tienes todas las derivadas habidas y por haber.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$f(x)=\arctan(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^2}$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$	$f(x)=\operatorname{arcsec}(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$f(x)=\operatorname{arccosec}(u)$	$f'(x)=-\dfrac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\operatorname{arccotg}(u)$	$f'(x)=-\dfrac{u'}{1+u^2}$
$f(x)=\sqrt[n]{u}$	$f'(x)=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$f(x)=\operatorname{senh}(u)$	$f'(x)=\cosh(u)\cdot u'$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=e^u\cdot u'$	$f(x)=\cosh(u)$	$f'(x)=\operatorname{senh}(u)\cdot u'$
$f(x)=a^u$	$f'(x)=a^u\cdot\ln(a)\cdot u'$	$f(x)=\tanh(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\cosh^2(u)}=(1-\tanh^2(u))\cdot u'$
$f(x)=\ln(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u}$	$f(x)=\operatorname{sech}(u)$	$f'(x)=-\operatorname{sech}(u)\cdot\tanh(u)\cdot u'$
$f(x)=\log_a(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u\cdot\ln(a)}$	$f(x)=\operatorname{cosech}(u)$	$f'(x)=-\operatorname{cosech}(u)\cdot\operatorname{cotgh}(u)\cdot u'$
$f(x)=\operatorname{sen}(u)$	$f'(x)=\cos(u)\cdot u'$	$f(x)=\operatorname{cotgh}(u)$	$f'(x)=-\operatorname{cosech}^2(u)$
$f(x)=\cos(u)$	$f'(x)=-\operatorname{sen}(u)\cdot u'$	$f(x)=\operatorname{arcsenh}(u)$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

$f(x) = \tan(u)$	$f'(x) = \dfrac{u'}{\cos^2(u)} = (1 + \tan^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \operatorname{arccosh}(u)$	$f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
$f(x) = \sec(u)$	$f'(x) = \dfrac{u' \cdot \operatorname{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x) = \operatorname{arctanh}(u)$	$f'(x) = \dfrac{u'}{1 - u^2}$
$f(x) = \operatorname{cosec}(u)$	$f'(x) = -\dfrac{u' \cdot \cos(u)}{\operatorname{sen}^2(u)}$	$f(x) = \operatorname{arcsech}(u)$	$f'(x) = -\dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{1 - u^2}}$
$f(x) = \operatorname{cotg}(u)$	$f'(x) = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2(u)}$	$f(x) = \operatorname{arccsch}(u)$	$f'(x) = -\dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{1 + u^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcsen}(u)$	$f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$f(x) = \operatorname{arccoth}(u)$	$f'(x) = \dfrac{u'}{1 - u^2}$
$f(x) = \arccos(u)$	$f'(x) = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$		
Operaciones con derivadas			
$f(x) = k \cdot u$	$f'(x) = k \cdot u'$	$f(x) = u + v - w$	$f'(x) = u' + v' - w'$
$f(x) = \dfrac{k}{u}$	$f'(x) = \dfrac{-k \cdot u'}{u^2}$	$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = \dfrac{u}{v}$	$f'(x) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$		

INTRODUCCIÓN A LAS INTEGRALES

Vamos a dar una definición ortodoxa y luego ya lo *traduciremos* a un castellano asequible para todos los públicos:

"*El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o anti derivación. Es muy común en la ingeniería y en la ciencia; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución*".

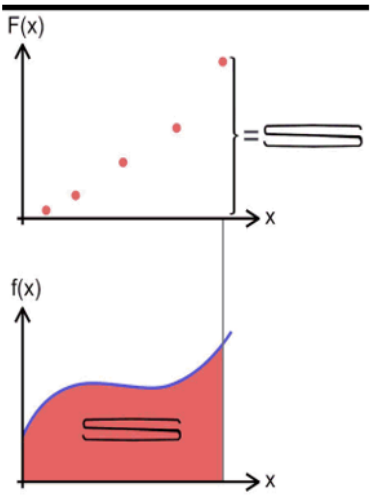
Esta definición queda muy molona pero lo real es que, aún no nos hemos sumergido en las *partes pornográficas* del tema y, ya nos empieza a sonar a Chino Cantonés. De todos modos, ya nos da una primera pista cuando nos habla de *anti derivación.* Luego volveremos a este punto.

De momento quédate con la película que derivada e integral son imágenes especulares.

Una Integral, dicho a lo bruto y sin anestesia ni nada, es una herramienta matemática que nos sirve para calcular el área de una figura geométrica, en la que uno de sus extremos describe una curva.

Algo así:

RAMON FERRER I MARÍ



Observa que en este dibujo aparecen dos representaciones gráficas:

La de arriba se llama F(x) y representa una serie de 5 puntos. Para obtener esos puntos usamos DERIVADAS.

La de abajo se llama f(x) y representa una figura geométrica cuyo lado superior es justamente la unión de los 5 puntos de la figura superior. La zona de color rosa es el área comprendida entre la línea de puntos y los ejes f(x) y x. Para calcular esa área usaremos INTEGRALES.

En resumen: La DERIVADA es respecto de un punto, mientras que la INTEGRAL lo es respecto de un área.

Autor: Kubrikov. Instituto Conjunto de Altas Temperaturas de la Academia de Ciencias de Rusia. Tomado de Wikipedia.

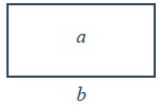
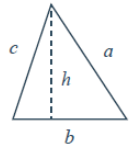
RAMON FERRER

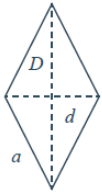
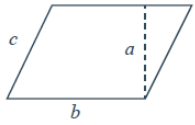
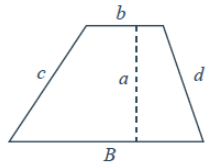
¿Y esto para qué narices sirve?

Cuando queremos calcular el área de una superficie geométrica cuyos lados son siempre una recta, disponemos de una serie de sencillas formulas trigonométricas.

Acto seguido os dejo un recorte de un PDF creado por el Gobierno de Canarias sobre Fórmulas de áreas y perímetros de figuras geométricas planas.

Como podéis ver, los cálculos son más simples que la electrónica de un botijo:

CUADRADO	RECTÁNGULO	TRIÁNGULO
		
$A = l^2$	$A = b \cdot a$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
$P = 4l$	$P = 2(a + b)$	$P = a + b + c$

ROMBO	ROMBOIDE	TRAPECIO
		
$A = \frac{D \cdot d}{2}$	$A = b \cdot a$	$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$

Fuente: Recursos pedagógicos en línea del Gobierno de Canarias.

El problema es que esas formulas son inútiles para calcular el área de una figura geométrica, en la que uno de sus extremos describe una curva. Pongamos un ejemplo: Imagina que somos una empresa constructora y tenemos dos clientes que nos piden que les construyamos una piscina.

El cliente A nos pide la típica piscina rectangular de 5 metros de largo por 4 de ancho y 2 metros de profundidad. Su superficie es de 5 * 4 = 20 metros

cuadrados y su capacidad es de 5 * 4 * 2 = 40 metros cúbicos[21] de agua.

Hasta aquí, todo bien.

El cliente B es el amigo Sergio Pelines Sarmiento Martín, forofo de la música heavy metal rock & roll y nos pide que la piscina tenga la forma de su guitarra eléctrica favorita.

Autor: El amigo Sergio Pelines Sarmiento Martín, sosteniendo un "guitarraso" eléctrico. Muchas gracias por tu generosidad, amigo.

Sin las integrales, calcular el área y volumen de agua de tan extravagante piscina sería una pesadilla imposible de realizar. Como podéis apreciar, una guitarra eléctrica no tiene de recto nada más que el mástil. Por todas las curvas que tiene, las integrales son imprescindibles.

Ahora retomamos la famosa *anti derivación*. Al ser como una imagen especular, su mecánica va al revés de lo que hemos hecho para derivar.

[21] Un metro cúbico equivale a 1.000 litros. Por lo que estamos hablando de 40.000 litros de agua.

RAMON FERRER I MARÍ

Pongamos una tabla y expliquémoslo mejor:

Función El exponente es n x^n	x^2	x^4	x^9	$3x^4$	$8x^3$	$3x^8$
Derivada: El exponente es n-1	$2x$	$4x^3$	$9x^8$	$12x^3$	$24x^2$	$24x^7$
Integral / Antiderivada: El exponente es n+1	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{10}}{10}$	$\frac{3x^5}{5}$	$\frac{8x^4}{4}$	$\frac{3x^9}{9}$
¿La Integral se puede simplificar?	NO	NO	NO	NO	SI $2x^4$	SI $\frac{x^9}{3}$

Fuente: Elaboración propia, sobre datos extraídos del Canal "El Profe", *Introducción a las Derivadas*

Así pues, mientras que en la derivada bajábamos el exponente en un 1, en la integral, el exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

RAMON FERRER I MARÍ

Ejemplo

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Caso que la función tenga un número delante, lo dejamos tal y como está, e integramos. A modo de ejemplo:

$$\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{3}{5}x^5$$

Nótese que si derivamos el resultado de una integral obtenemos la función que se está integrando. Esta es una forma de comprobar si la integral quedó bien resuelta.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}x^5\right) = 5 \cdot \frac{3}{5}x^4 = 3x^4$$

Y ahora, sin anestesia ni nada, con dos *cohones*, nos tiramos a la piscina:

$$\int (x^3 + 5x^2 + 3x + 2)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$$

¿Cómo lo hemos hecho? Pues en 3 pasos:

1. Los tres primeros términos de la integral $(x^3 + 5x^2 + 3x)$ no tienen ningún secreto. Simplemente, hemos aplicado $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ y nos quedamos tan panchos.
2. A la integral de cualquier número sólo, se le agrega una x, por eso al integrar, el 2 lo hemos

RAMON FERRER I MARÍ

convertido en 2x. (Recuerda que cuando derivábamos, la derivada de 2x era igual a 2).

3. Una integral indefinida[22] como esta, siempre se acaba añadiendo una C o una K al final, que simbolizan una CONSTANTE.
   - ✓ Recuerda que, cuando derivábamos, la derivada de un número solo era igual a 0.
   - ✓ Ponemos la C o la K, porque al ser una integral no definida, no tenemos forma alguna de determinar (=saber) cuál era ese número.

Vamos a hacer una ruta completa que nos va a llevar desde una función inicial, para luego hacerle su derivada y luego, a partir de ésta, obtener su integral.

A partir de una función, primero la derivaremos y luego, agarramos la derivada y le haremos su integral:

Sea la función

$$y = 4x^2 + 5x - 3$$

Al derivarla nos queda

$$y' = 8x + 5$$

[22] Una integral definida suele producir un valor; a diferencia de una integral indefinida, que produce una función.

RAMON FERRER I MARÍ

Y ahora vamos a hacer su Integral:

$$\int (8x+5)\,dx = \int 8x\,dx + \int 5dx = \frac{8x^2}{2} + 5x + C$$

$$\int (8x+5)\,dx = 4x^2 + 5x + C$$

Aunque ya no debería ser un problema a estas alturas, vamos a poner una fracción de por medio y veamos qué pasa:

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) dx = \frac{2x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C$$

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + C\,dx$$

Vamos a hablar ahora de las Integrales definidas y, para ello, he recurrido a unos apuntes extraídos de:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integral-definida.html

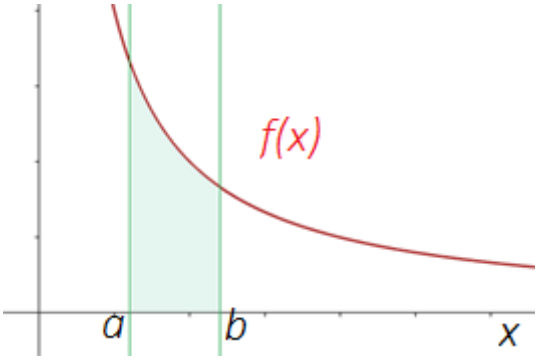
Vamos a tocar 6 puntos que son los siguientes:

1. Integral definida
2. Propiedades de la integral definida
3. Regla de Barrow
4. Teorema fundamental del cálculo
5. Teorema de la media o del valor medio para integrales
6. Función integral

RAMON FERRER I MARÍ

Integral definida

Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b)]$, la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



¿Qué es cada cosa en una integral definida?

Una integral definida está compuesta por 6 elementos:

1. La **integral definida** se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

2. ∫ es el signo de integración.

3. ***a*** es el límite inferior de la integración.

4. ***b*** es el límite superior de la integración.

5. $f(x)$ es el **integrando** o función a integrar.
6. dx es el **diferencial** de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1. El valor de la **integral definida** cambia de signo si se permutan (*se cambia el orden de*) los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la **integral definida** vale **cero**. Ejemplo: Si vivo en Barcelona y quiero viajar a València, pero no salgo de mi casa, la distancia recorrida en el viaje es cero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. Si c es un punto interior del intervalo $[a,b]$, la i**ntegral definida** se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. La **integral definida** de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k \cdot f\,(x)dx = k \int f\,(x)dx$$

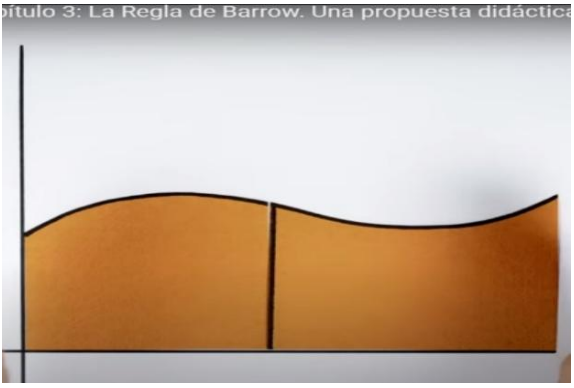
Regla de Barrow

La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $g(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

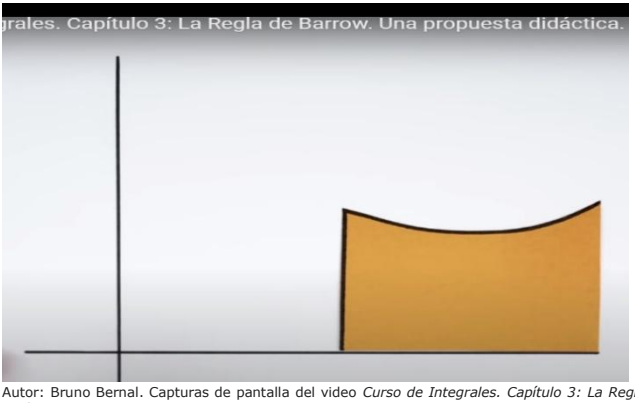
$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Esta regla sirve para calcular trozos de Áreas.

Según el profesor YouTuber Bruno Bernal, Lo que quiso decir Barrow es que, si tengo una función y quiero calcular el área que queda entre dicha función y el eje x, tenemos que calcular el área completa:



y luego restarle el trozo que NO nos interesa, en este caso, el trozo de la izquierda:



Autor: Bruno Bernal. Capturas de pantalla del video *Curso de Integrales. Capítulo 3: La Regla de Barrow. Una propuesta didáctica.* https://www.youtube.com/watch?v=YEensJZPE6c

Teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

El **Teorema Fundamental del Cálculo** nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas, además de describir la mecánica de operación de las integrales definidas.

Por eso, dada la integral definida entre a y b, de la función $f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1. Buscamos la antiderivada $F(x)$ definida entre *a* y *b*.

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

2. Luego hacemos la resta entre la antiderivada $F(b)$ y la antiderivada $F(a)$

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: Integral definida Ejercicio 1 JulioProfe.

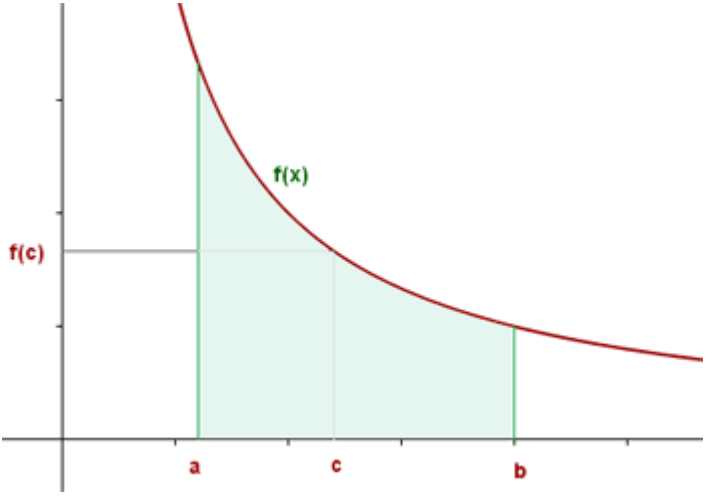
Autor: JulioProfe. Capturas de pantalla de video INTEGRAL DEFINIDA - Ejercicio 1.
https://www.youtube.com/watch?v=wuI5MFhvgsY

$$\int_{-3}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-3}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{27}{3} = \frac{35}{3}$$

Teorema de la media o del valor medio para integrales

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un punto c en el interior del intervalo tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$



Función integral

Sea $f(t)$ una **función continua** en el intervalo $[a, b]$.

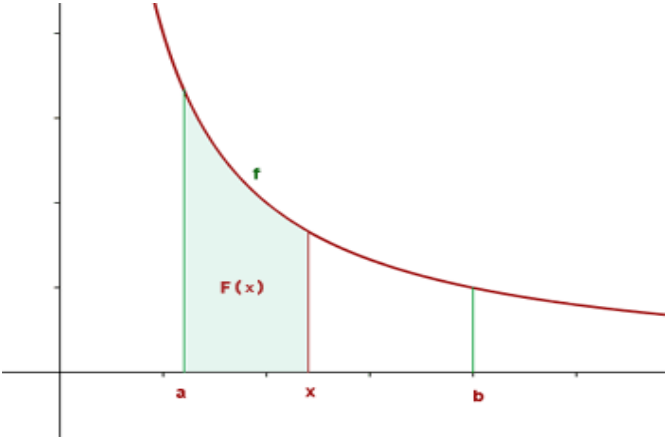
A partir de esta función se define la **función integral**:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

que depende del límite superior de integración.

Para evitar confusiones cuando se hace referencia a la variable de f, se la llama t, pero si la referencia es a la variable de F, se la llama x.

Geométricamente la **función integral**, $F(x)$, representa el **área** del recinto limitado por la curva $y = f(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = a$ y $t = x$



A la **función integral**, $F(x)$, también se le llama **función de áreas** de f en el intervalo $[a, b]$.

A ver, todo esto está muy bien, pero vamos a darle unas explicaciones claras.

Lo primero de todo recordar que, en una integral definida, nos pasan dos cosas importantes:

1) Estamos averiguando cómo se comporta una función entre dos puntos determinados.
2) Como es una integral definida, siempre nos va a dar un número, no una función, como pasa en las integrales indefinidas.

Vamos a desarrollarlo un poquito más:

Estamos averiguando cómo se comporta una función entre dos puntos determinados. El punto inferior lo ponemos debajo y el superior arriba de la S gigante que representa el signo de integración, tal que así:

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

RAMON FERRER I MARÍ

Haciendo una integral definida, paso a paso:

Sea,

$$\int_1^2 x^2\,dx$$

Paso 1: Las operaciones matemáticas son las mismas que en las integrales indefinidas, es decir, primero buscamos la antiderivada de la función: El exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ o sea:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=2}$$

Paso 2: Ahora, siguiendo el Teorema Fundamental del Cálculo, vamos a evaluar los límites de la integración, lo que en cristiano quiere decir que tenemos que substituir la x, primero por el límite superior y luego por el límite inferior.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

RAMON FERRER I MARÍ

Así que vamos a substituir la x por los límites de la integral y operamos. La cosa va a quedar así:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}3333$$

Y lo dejamos de esta forma $\frac{7}{3}$, como resultado final, puesto que no lo podemos reducir, y si dividimos 7 entre 3 No nos dá un número entero. (7÷3= 2,33333…).

RAMON FERRER I MARÍ

RESUMEN

Definición de derivada	$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	
Cálculo de derivadas	Si $f(x)=k$ entonces $f'(x)=0$ Si $f(x)=x^k$ entonces $f'(x)=kx^{k-1}$ Si $f(x)=g(x)+h(x)$ entonces $f'(x)=g'(x)+h'(x)$ Si $f(x)=kg(x)$ entonces $f'(x)=kg'(x)$ Si $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ entonces $f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))\Rightarrow h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Si $f(x)=ln(x)$ entonces $f'(x)=\frac{1}{x}$ Si $f(x)=a^x$ entonces $f'(x)=a^x\cdot ln a$ $f(x)=sen(x)\Rightarrow f'(x)=cos(x)$ $f(x)=cos(x)\Rightarrow f'(x)=-sen(x)$ $f(x)=tg(x)\Rightarrow f'(x)=1+tg^2(x)$ $f(x)=sh(x)\Rightarrow f'(x)=ch(x)$ $f(x)=ch(x)\Rightarrow f'(x)=sh(x)$ $f(x)=th(x)\Rightarrow f'(x)=1-th^2(x)$ $f(x)=arcsen(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f(x)=arccos(x)\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f(x)=arctg(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $f(x)=argsh(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $f(x)=argch(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $f(x)=argth(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$	$y=7x^3+2x^5\rightarrow$ $y'=21x^2-10/x^6$ $y=\sqrt{x}\cdot 2x\rightarrow$ $y'=(1/2)\sqrt{x}\cdot 2x+\sqrt{x}\cdot 2$ $y=\frac{3x}{x^2-1}\rightarrow$ $y'=\frac{3\cdot(x^2-1)-3x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}$ $y=\sqrt{x^3+2}\rightarrow$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3+2}}\cdot 3x^2$ $y=arcsen(e^x)\Rightarrow y'=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ $y=arccos(x^2)\Rightarrow y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ $y=arctg(x^3)\Rightarrow y'=\frac{3x^2}{1+x^6}$ $y=argsh(e^x)\Rightarrow y'=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ $y=argch(x^2)\Rightarrow y'=\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$ $y=argth(x^3)\Rightarrow y'=\frac{3x^2}{1-x^6}$
Recta tangente	$y=f(a)+f'(a)(x-a)$	Tangente a $y=x^3+2x$ en el punto (0, 0): $y=0+2(x-0)=2x$.
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a)>0$ entonces $y=f(x)$ es creciente en $x=a$. Si $f'(a)<0$ entonces $y=f(x)$ es decreciente en $x=a$.	$y=x^3-3x\rightarrow y'=3x^2-3=0\rightarrow$ $x=1, x=-1$. Para $x<-1, y'>0\rightarrow y$ creciente. Para $-1<x<1, y'<0\rightarrow$ y decreciente Para $x>1, y'>0\rightarrow y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y=f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a)=0$. Si $f'(a)=0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto singular o crítico. Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.	$y=x^3-3x\rightarrow y'=3x^2-3\rightarrow y''=6x$. $y'(-1)=0, y''(-1)<0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1)=0, y''(1)>0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA RECTA.

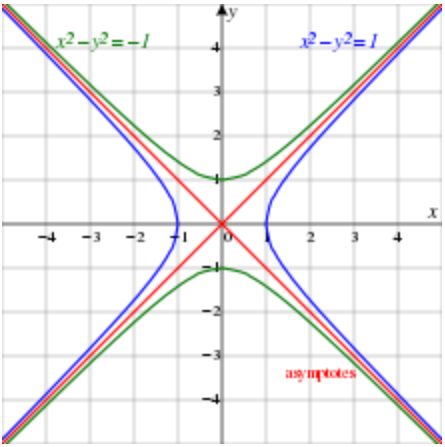
Don Agustín Larrauri Pacheco, Profesor Numerario de Matemáticas del Instituto Politécnico de Bilbao, hace una definición muy clara de lo que es la Geometría analítica, en su libro de Matemáticas F.P.2-3º, al decir que:

"*La Geometría Analítica tiene por objeto el estudio de la Geometría, mediante procedimientos de cálculo propios del Análisis Matemático".*

Con ello se logró que dos disciplinas matemáticas como son la Geometría y el Álgebra, encontrasen una relación entre ellas. No olvidemos que, hasta principios del Siglo XVII se consideraban completamente independientes.

Dicho de otra manera, la geometría analítica es una rama de las matemáticas dedicada al estudio en profundidad de las figuras geométricas y sus respectivos datos, tales como áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección, ángulos de inclinación, etcétera. Para ello emplea técnicas básicas de análisis matemático y de álgebra permitiendo, además, la representación e interpretación geométrica del álgebra.

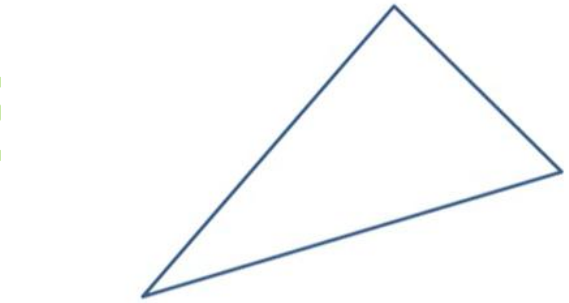
RAMON FERRER I MARÍ



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Drini-conjugatehyperbolas.png

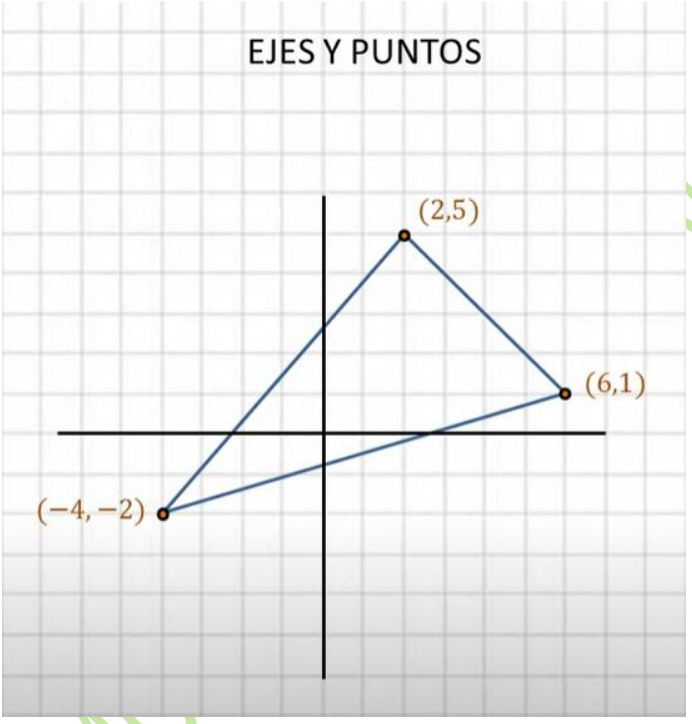
En la geometría tradicional nos dedicamos a tomar una hoja de papel y dibujar una figura, por ejemplo un triángulo, "*por las bravas*", tal que así:

EJES Y PUNTOS



Autor: Captura de pantalla del video de "pildoras matemáticas" 01 Ejes y puntos.
https://www.youtube.com/watch?v=vozdtTj2D2U&list=PLwCiNw1sXMSAMNnvvsBGpp778cpwcoDuV

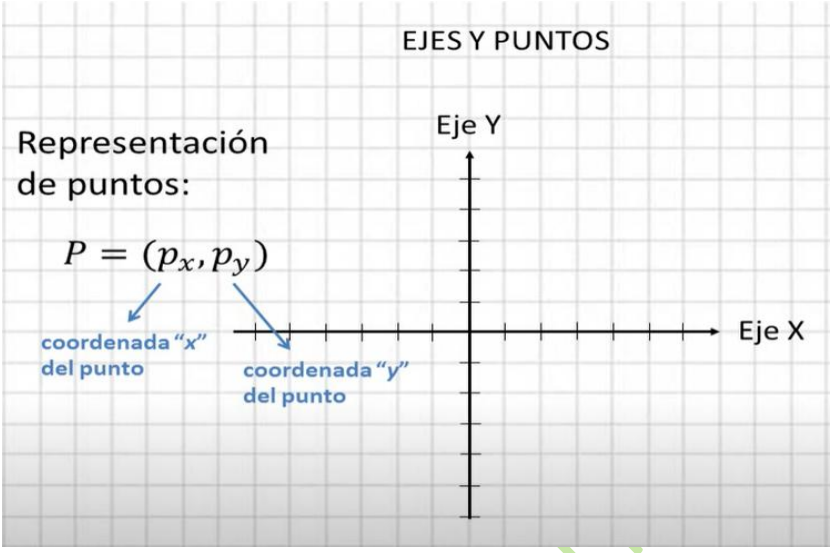
Pero al aplicarles los ejes de coordenadas llamados plano cartesiano, podemos situarlos espacialmente, al ir referenciados en el citado eje cartesiano, tal que así:



Autor: mismo que el anterior.

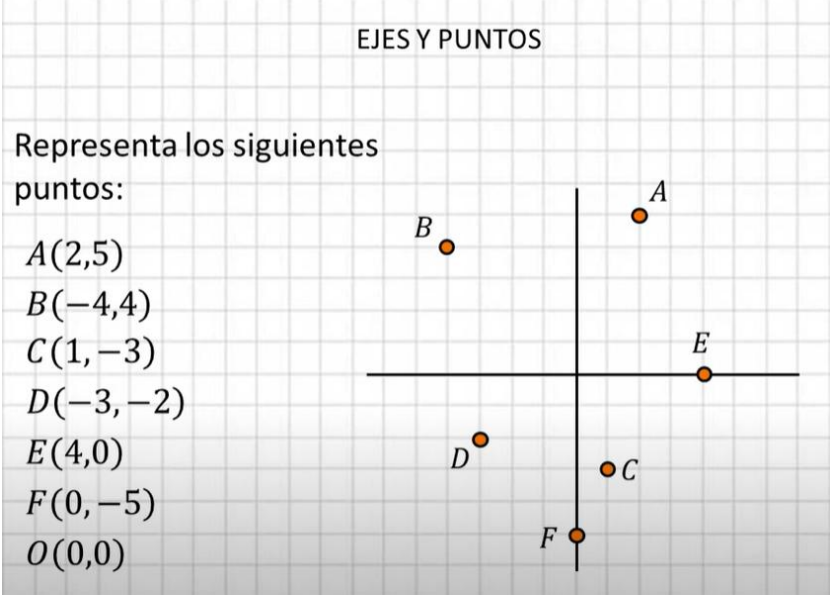
Ahora sabemos que los vértices ocupan los puntos (-4,2), (6,1) y (2,5) referidos al eje de coordenadas.

Los ejes cartesianos vemos que se componen de una línea horizontal llamada Eje X, al que se le cruza en su punto medio una línea vertical llamada Eje Y. Determinamos una distancia entre punto y punto y se replica en ambos ejes y en ambas direcciones, tal que así:

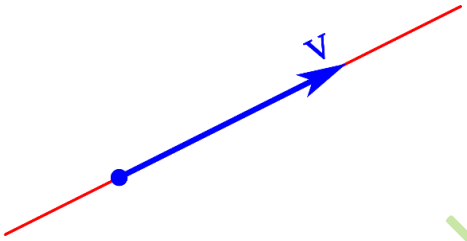


Autor: mismo que el anterior.

De este modo, podemos ubicar cualquier punto referenciándolo por el par ordenado que nos indica el punto x y el punto y.

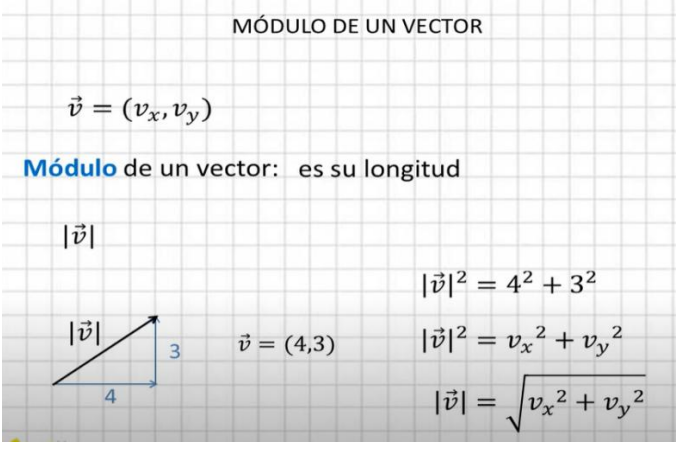


El siguiente concepto fundamental és el de vector, que en Matemáticas y Física, es cualquier ente matemático que se puede representar mediante un segmento de recta orientado dentro del espacio euclidiano. Representado gráficamente sería esto, sacado de Wikipedia.

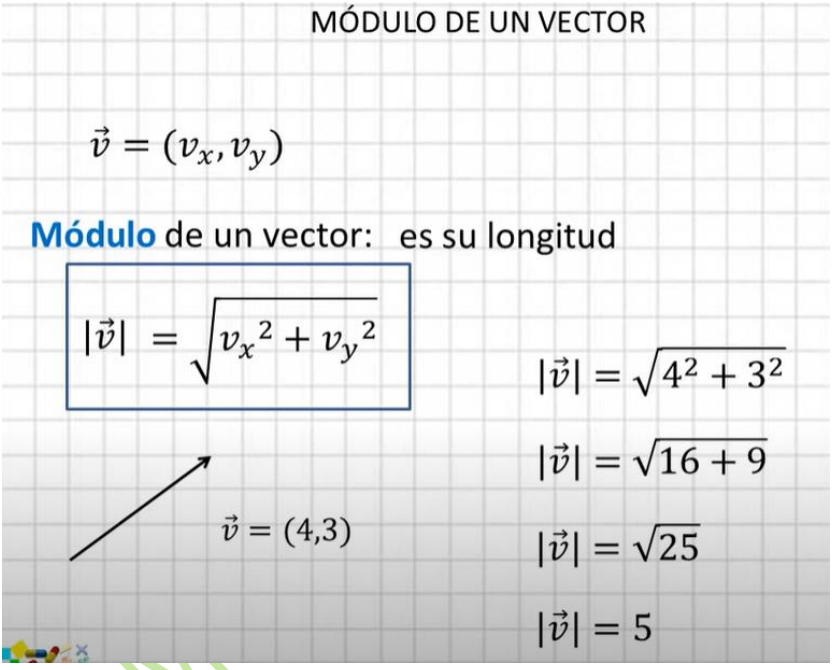


Autor: Dnu72.
Wikipedia.

La longitud de un vector se llama módulo y se obtiene, por Teoréma de Pitágoras (“Pitty”, para los amigos), calculando la raiz cuadrada del cuadrado de sus coordenadas.



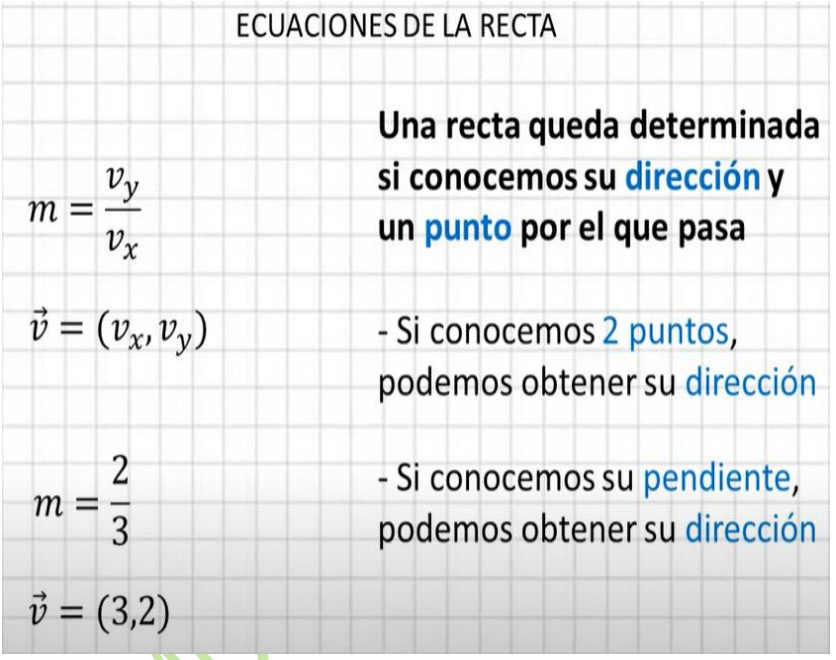
Se compone de v_x que es la dirección horizontal y v_y que nos dá la dirección vertical.



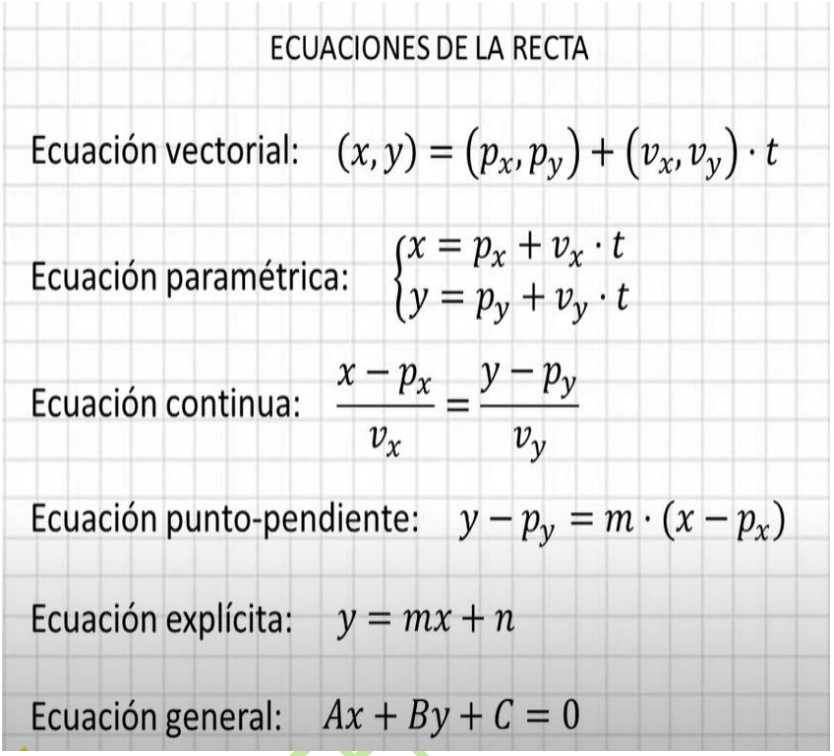
Autor: Captura de pantalla del video de "pildoras matemáticas"

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Solamente voy a hacer una introduccíón a la recta y a los vectores, muy suscinta. Recordad que la geometría analítica incluye la circunferencia, la parábola, la elise, la hipérbola y las cónicas.



La geometría analítica de la recta se puede condensar en estas 6 ecuaciones:



Y lo dejo aquí, mejor id al canal "Píldoras Matemáticas" u otro que os resulte fácil de entender.

RAMON FE

¿HAY ALGUNA RECETA PARA HACER LOS EJERCICIOS DE MATES?

Pues la más básica es el proceso **L.E.D.O.C**

LEER.

ENTENDER.

DESCUBRIR.

OPERAR.

COMPROBAR.

Obviamente, cuando cojas práctica pasarás directamente de Entender a Operar, pero como proceso de estratégia de pensamiento para empezar a resolver problemas de matemáticas, no conozco otro mejor.

La estratégia de pensamiento para resolver un problema matemático, mediante el proceso **L.E.D.O.C**. pasa por realizar cuatro pasos:

1. **Leer el problema detenidamente para Entender qué nos piden que averiguemos (*la incógnita*) y qué elementos nos dan (*datos*).**
2. **Descubrir qué àreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.**
3. **Ejecutar las Operaciones matemáticas correspondientes.**

RAMON FERRER I MARÍ

4. **Comprobar el resultado, primero desde la lógica y luego con operaciones complementarias.**

Veamos su aplicación práctica en un problema:

"Eres el primer comprador de una parcela de terreno urbanizable, con forma de rectángulo, que tiene 30 metros de largo y 22 metros de ancho. El Ayuntamiento te exige que marques ese terreno usando una valla. Hablas con un constructor y te dice que te va a cobrar el metro de valla a 25€ + I.V.A.

Calcula cuánto te va a costar construir esa valla, sabiendo que el tipo de I.V.A. a aplicar es del 21%"

RAMON FERRER I MARÍ

1. Leer el problema detenidamente para Entender qué nos piden que averiguemos y qué datos nos dan.

Esta fase es crucial. No importa si tienes que leer el problema tres veces seguidas (o las que haga falta).

Antes de ponerte a operar, asegúrate de haber entendido qué datos te están dándo y cuál es la incognita que debes averiguar. Vamos al turrón.

Nos piden que averiguemos el coste de vallar nuestra parcela. A éste elemento le llamaremos *incógnita*.

Como *datos* nos dan las dimensiones del terreno, nos dicen que tiene forma de rectángulo y por último, cuánto cuesta el metro de valla construido.

Además, nos piden que le apliquemos el Impuesto del Valor Añadido (I.V.A.), y nos dicen que el porcentaje a incrementar es del 21%.

2. Descubrir qué àreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.

Tenemos tres datos en forma de números naturales (largo, ancho y precio), por lo que recurriremos a la aritmética y nos dicen que es un rectángulo, por lo que también es un tema de geometría.

Dentro de la geometría, se trata del perímetro de un rectángulo, que es la suma de todos los lados del mismo, por lo que podemos deducirlo de dos maneras diferentes: o sumamos los cuatro lados o hacemos servir la formula correspondiente a la perímetro de un rectángulo.

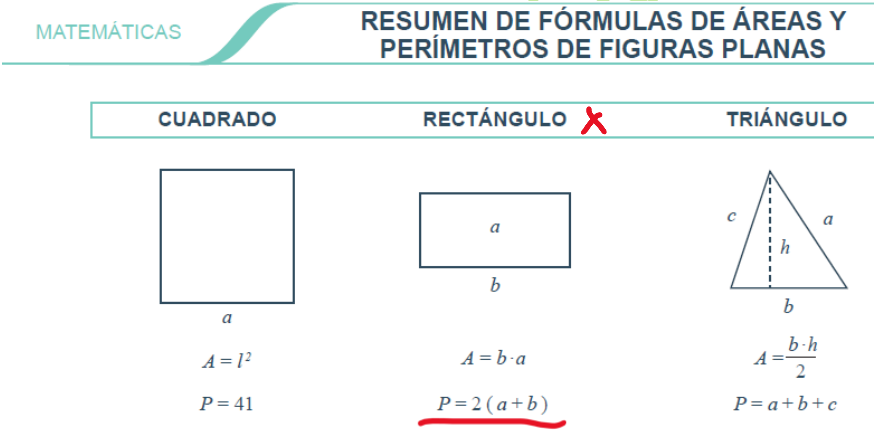
Para la parte impositiva nos toca echar mano de lo que aprendimos en la aritmética de las proporciones, sobre reglas de tres y cálculo de porcentajes.

RAMON FERRER I MARÍ

3. Ejecutar las Operaciones matemáticas correspondientes.

Averiguamos la distancia a vallar sumando los cuatro lados, es decir, 30 + 22 + 30 + 22 = 104 metros.

O podemos recurrir la fórmula del perímetro de un rectángulo que es P = 2 (a+b) y se lee como "Perímetro es igual a multiplicar por dos la suma del lado más largo y la del lado más corto".



P = 2 (a+b) y aplicando → 2 (30+22) → 2 (52) → 104 metros.

Finalmente, multiplicamos los 104 metros por los 25€ que cuesta el metro de valla y obtenemos que

104 metros x 25€ = 2.600€

Pero aún nos queda por responder a la parte impositiva. Es un tema que podemos resolver de tres maneras diferentes:

Método 1: Mediante una Regla de Tres con resultado parcial.

Precio en €
Porcentaje

$$X=\frac{2.600\ x\ 21}{100}=546€$$

Ojo al Cristo, que es de plata. 546€ es lo que nos cobran de I.V.A. Si nos piden sólo eso, ya hemos terminado.

Pero si volvemos al enunciado, decía:

(…) "Calcula cuánto te va a costar construir esa valla, sabiendo que el tipo de I.V.A. a aplicar es del 21%"

Por lo que al precio sin I.V.A. que son 2.600€, toca añadirle lo que hemos calculado, que son 546€.

RAMON FERRER I MARÍ

Así pues, lo que tenemos que hacer es sumar ambas cantidades:

$$2.600€ + 546€ = 3.146€.$$

Ya lo tenemos, pero no te cierres mentalmente en banda, ya que aún nos quedan otros dos métodos.

RAMON CERRER I MARÍ

Método 2: Mediante una Regla de Tres con resultado global.

Como nos piden cuánto es el precio total, sabemos que al 100% de lo calculado (2.600€) hay que añadirle el 21% de I.V.A. por lo que, en realidad, visto en términos de porcentaje total, nos interesa conocer cuánto dinero es el 121% de 2.600€. También lo podemos resolver mediante otra regla de tres:

Precio en €	*Porcentaje*
2.600€	100
X	121

$$X=\frac{2.600\ x\ 121}{100}=3.146€$$

Método 3: Mediante Cálculo de porcentaje directo.

Este tercer método es el que más me gusta, por lo sencillo y rápido que es. Recuerda lo que vimos al respecto.

PORCENTAJES – MÉTODO DIRECTO	
Si quiero calcular el 25%	·0,25
Si quiero calcular el 30%	·0,30
Si quiero aumentar un 25%	·1,25
Si quiero aumentar un 30%	·1,30
Si quiero disminuir un 25%	·0,75
Si quiero disminuir un 30%	·0,70

Si quiero aumentar un 21%, todo lo que tengo que hacer es multiplicar el importe sin I.V.A. (2.600€) por 1,21 y ya lo tengo:

2.600€ * 1,21 = 3.146€.

4. Comprobar el resultado, primero desde la lógica y luego con operaciones complementarias.

Mediante la lógica:

El resultado es razonablemente correcto porque, si hubiésemos vallado 100 metros nos hubiese costado 2.500€. Como lo obtenido es ligeramente superior, debe ser correcto. Observa que sólo comprobamos la parte principal, para facilitar y agilizar las operaciones.

Mediante operaciones complementárias:

100 metros serían 2.500€ y 4 metros son 25x4€= 100€ por lo que si sumamos 100 + 4 metros son 2.500€ + 100€, y salen los 2.600€ que hemos obtenido antes.

Podemos estar tranquilos/as ya que el resultado es correcto, puesto que hemos llegado a él por dos lineas de razonamiento y de operación diferentes.

Oye, Ramón… ¿Y si me ponen un ejercicio?

Pues lo mismo, mi querido/a amigo/a, aplicaremos paso a paso el proceso **L.E.D.O.C.**

RAMON FERRER I MARI

1º LEER el enunciado →

"Hallar la derivada de la función

y = $12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$"

2º ENTENDER qué nos están pidiendo. → Esto es un ejercicio de cálculo, no un problema.

3º DESCUBRIR qué áreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.

Como nos piden "Hallar la derivada", pues es un ejercicio de Cálculo Diferencial como una casa.

4º OPERAR para hallar el resultado.

y = $12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$

$\frac{dy}{dx} = 5 * 12X^4 - 4*3X^3 + 3*8X^2 - 2*2X^1 + 5*1\ (X^0) - 0$

$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5 - 0$

Y aunque con este aspecto está intrínsecamente correcta, por costumbre, cuando tenemos una constante (10, en este caso) cuya derivada es 0,

RAMON FERRER I MARÍ

éste 0 no se pone, con lo que el resultado final de la derivada, así en plan bonito, y con la ropa de los domingos, sería:

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$$

5º COMPROBAR el resultado: Si las circunstancias lo permiten, es mejor hacerlo. Si el tiempo apremia, como en un exámen, mejor volver a repasar el desarrollo, una vez hayas terminado el resto de ejercicios.

En este ejemplo, si hacemos la integral de

$$60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$$

Nos debería dar la función original. Vamos a probar:

$$\int 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5 - 0$$

$$\frac{60X^5}{5} - \frac{12X^4}{4} + \frac{24X^3}{3} - \frac{4X^2}{2} + 5X - C$$

y = $12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - C$.

SÍ, está bien, porque hemos recuperado la función original.

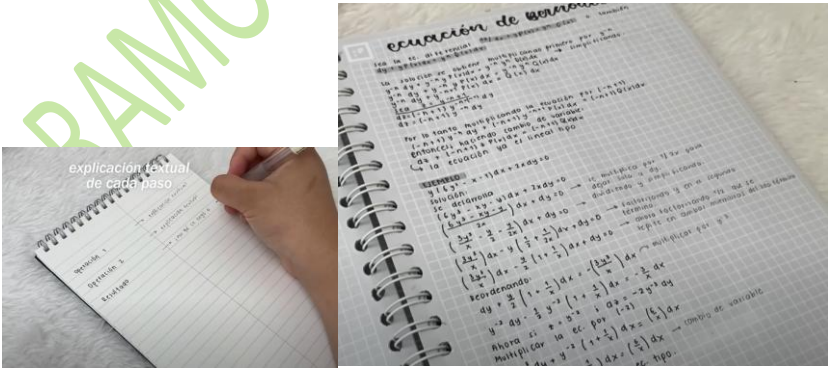
RAMON FERRER I MARÍ

LOS APUNTES, LA CLAVE PARA ENTENDER, ESTUDIAR E INTERIORIZAR.

Saber tomar apuntes en clase, así como tener organizados los tuyos es imprescindible. Te aconsejo que pongas en tu buscador en internet la frase *apuntes de matemáticas* y eches un vistazo a los vídeos que aparecen.

Hay muchas maneras de tormarlos, así que invierte tiempo en encontrar aquel sistema que te los haga cómodos y asequibles. Para simplificar tu búsqueda, te aconsejo a la inteligentísima YouTuber Mexicana, Thelma Clatza, que tiene un video interesantísimo, en el que explica y compara diferentes métodos de tomar apuntes.

Se titula: *"8 maneras de tomar apuntes que todo estudiante debe conocer / cornell, boxing, outline y más".* Su enlace es https://www.youtube.com/watch?v=V-BpvNafw_4



Ejemplo del "*método de las Columnas*", a mi entender, excelente para las matemáticas.

RAMON FERRER MARI

LISTADO DE PROFESORES YOUTUBERS.

- **Bruno Bernal.** Canal de YouTube donde encontrarás la teoría, explicada de una forma muy sencilla, de temas de matemáticas, como Ecuaciones, Potencias, Derivadas e Integrales. Su titular es Bruno Bernal, licenciado en Psicología con la especialidad de Educación, Ingeniero de Edificación y Arquitecto Técnico. https://www.youtube.com/playlist?list=PLwkJeiatsbfZ1plQSW_guGcJzk3kKBc6u

- **Matemáticas profe Alex**. Su titular es Alexander Gómez, Licenciado en Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

  https://www.youtube.com/@MatematicasprofeAlex/playlists

- **El Profe.** Su titular es Braulio Mendoza, profesor de Calculo diferencial e integral, matemáticas superiores, ecuaciones diferenciales, física moderna y probabilidad y estadística. Actualmente es Coordinador Técnico de Capacitación Mantenimiento en VivaAerobus, en México.
  https://www.youtube.com/@ElProfe1977/playlists

RAMON FERRER I MARI

- **Julioprofe.** Su titular es Julio Alberto Ríos Gallego (Cali, 22 de marzo de 1973), más conocido como Julioprofe, es un ingeniero civil, profesor, conferencista, tutor y youtuber colombiano.
  https://www.youtube.com/@julioprofe

- **Profesor10demates**. Su titular es Sergio Castro, un ingeniero técnico industrial por la Universidad de León (España), y que cuenta con el Grado Superior de Ingeniería Mecánica por la UNED. Profesor de Matemáticas, Física y Química desde hace 15 años y apasionado del vibrante mundo de las ciencias. Si buscas un profesor polifacético que te enseñe Matemáticas, Física y Química, te aconsejo a este hombre simpático y cariñoso, se ha ganado su éxito en YouTube por derecho propio.

https://www.youtube.com/@profesor10demates

- **Blue Dot.** Paulo César Churata Huamaní es un físico peruano que enseña Matemáticas y Física mediante animaciones realizadas en Python, un programa de animaciones que le imprime una forma novedosa y muy didáctica. https://www.youtube.com/@BlueDot96

RAMON FERRER I MARÍ

- **Píldoras Matemáticas.** Francisco Gil Recio es un profesor madrileño que ha creado este canal, mediante la ingeniosa idea de dividir los temas en Listas de reproducción que contiene un numero variable de cortos vídeos, de unos 10 minutos o menos de duración. https://www.youtube.com/@pildorasmatematicas9582

- **El Traductor de Ingeniería.** Damián Pedraza es un ingeniero electrónico argentino. Sus clases son muy socráticas, en el sentido que desea que quien visita su canal, aprenda a pensar. Su estilo es muy personal, pero aún así, muy recomendable. https://www.youtube.com/@eltraductor_ok

- **IngE Darwin.** Poco he encontrado de él, salvo que es un inteligentísimo profesor ecuatoriano. Os dejo su Facebook: https://www.facebook.com/IngEDarwinCC/

RAMON FERRER I MARÍ

PSICOLOGÍA, VIDA COTIDIANA Y MATEMÁTICAS.

La gran psicóloga y psicoterapéuta española, Leonor Martorell, dijo una vez: *"Yo soy, cuando comprendo".*

Mi humilde pretensión es ayudarte a comprender las matemáticas. Y lo digo yo, que soy un hombre de letras y para mí, las matemáticas fueron un trago insufrible, en mis años de estudiante.

LA ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN.

"No es lo mismo comprarse un traje negro, que verse negro para comprarse un traje".

"No es lo mismo dos bolas chicas[23], que dos chicas[24] en bolas[25]".

Estos dos dichos, habituales en España, nos marcan la importancia que tiene organizar correctamente la información, tanto la que nos dan, como la que proporcionamos a los demás.

RAMON FERRER I MARÍ

[23] En este caso, chica equivale a "*cosa de pequeño tamaño*".
[24] En este caso, chica es sinónimo de "*muchacha*" o "*mujer joven*".
[25] En Castellano de España, la expresión "*estar en bolas*" significa que esa persona esté desnuda, sin ropa alguna que cubra su cuerpo.

Las matemáticas son un lenguaje en sí mismo, pero debemos cuidar el lenguaje hablado y escrito en todo momento.

En la vida, en nuestro lenguaje y en las matemáticas debemos aplicar la regla de las tres C: Hay que ser Claro[26], Conciso[27] y Concreto[28].

Muchos malentendidos en la vida se solventarían con sólo aplicar estos tres puntos. A mí me lo enseñó el gran maestro de la Gestalt española, el valenciano Albert Rams, con una máxima muy sencilla de recordar, que responde a tres simples preguntas:

1. **¿Qué quieres?,**
2. **¿Cómo lo quieres?,**
3. **¿De quien lo quieres?"**

Y la respuesta genérica correspondiente es del tenor siguiente:

"Yo quiero esto, lo quiero de esta manera y lo quiero de ti".

Veamos estos tres ejemplos:

RAMON FERRER I MARÍ

[26] Inteligible, fácil de comprender.
[27] Capacidad de Brevedad y economía de medios en el modo de expresar un concepto con exactitud.
[28] Ser capaz de reducir a lo más esencial y seguro la materia sobre la que se habla o escribe.

"Yo quiero un beso, lo quiero en los lábios y lo quiero de ti".

"Yo quiero que (tú) me des un masaje en la espalda, que incluya la nuca, los brazos y las nalgas"

"Yo quiero que (tú) me prepares un bocadillo de 30 centímetros de largo, con pan de baguette, que lleve una tortilla francesa de dos huevos y dos lonchas de bacon. El huevo lo quiero bien cuajado y el bacon, poco hecho".

Evidentemente, como pasa en el último ejemplo, contra más detalles demos, más fácil le resulta a la otra persona el poder satisfacer nuestro deseo con mayor exactitud.

El riesgo de no ser claro, conciso y concreto puede ser algo así…

Sin datos del autor.

Volviendo a las matemáticas hay una forma muy sencilla de organizar la información, mediante una tabla de valores que nos relacione magnitudes.

"Indique cual es el doble de los primeros cinco números naturales"

Sabemos que el doble de un número significa multiplicar por 2 ese número. Así pues, llamaremos al número natural "***x***" y a su doble lo definimos como "***y***", *por lo que estableceremos la relación* ***y = 2x*** con lo que tenemos la siguiente tabla.

DOBLE DE LOS CINCO PRIMEROS NÚM. NATURALES

NÚMERO NATURAL (**x**)	SU DOBLE (**y**)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

En matemáticas hay que prestar atención a lo que nos piden, no vaya a ser que tenga trampa, como el siguiente enunciado.

"Cuando yo tenía 10 años, mi hermano tenía la mitad de mi edad. Ahora que tengo 50 años, ¿Cuántos años tiene mi hermano?".

RAMON FERRER I MARÍ

Un análisis hecho de cabeza y a toda prisa, nos lleva a la conclusión que el hermano tiene 25 años, porque nos hablan de la mitad pero… ¿Es cierto?. Vamos a comprobarlo, razonándolo:

Si cuando yo tenía 10 años, mi hermano tenía la mitad de mi edad, eso quiere decir que tenia la mitad de 10 años, o sea 10 dividido entre 2, con lo que tenía 5 años.

Sabiendo que él siempre tendrá 5 años menos que yo, cuando yo tenga 50 años, él tendrá 5 menos que yo, o sea, 50 – 5 = 45 años. Pero vamos a cerciorarnos empíricamente, así que primero hacemos la tabla

Yo (x)	Mi hermano (y)
0	0
5	0
10	5
15	10
20	15
25	20
30	25
35	30
40	35
45	40
50	45

RAMON FERRER I MARÍ

TRUCO IMPORTANTÍSIMO:

Cuando construyas una tabla, aunque te parezca una tontería, incluye siempre el valor **x = 0**.

Así evitarás confusiones, porque el truco para hacer bien un problema de edades consiste en partir de la premisa que ambas personas tienen cero años.

Algebraicamente diríamos: Sea y la edad de mi hermano. Sea x, la mía.

A mis 10 años, mi hermano tenía la mía menos 5 o sea, **y = x – 5**, por lo que **x = 10 – 5**. Ahora que tengo 50 años, la de mi hermano será **x = 50 – 5**, lo que nos dá 45 años. Y coincide con la tabla.

RAMON FERRER I MARI

GRANDES PIFIAS DE AYER Y HOY…

En este apartado voy a hablar de obviedades que cualquier persona a la que se le dén bien las matemàticas, va a pensar que son, de puro simple, tontorronas.

Pero es que este texto no se ha escrito para ellas. Se ha escrito para personas como yo, que las matemáticas no las vivimos, las sufrimos.

Una fuente de pifias, también llamadas errores típicos se dá en el momento en el que confundimos acciones usuales de sumas y restas, con acciones usuales de multiplicaciones y divisiones.

Así que el primer aviso a navegantes que puedo dar es el siguiente:

CUIDADO CON APLICAR LO MISMO A SUMAS Y RESTAS, QUE A MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES.

Me explico: En Álgebra y en potencias cuando las operaciones son sumas y restas, pasa una cosa, y cuando las operaciones son multiplicaciones y divisiones, pasa otra cosa diferente.

Y desgraciadamente, es demasiado frecuente que se produzcan confusiones y se termine operando de manera errónea.

RAMON FERRER I MARÍ

Así pues en álgebra, debemos distinguir muy claramente entre término de una operación y signo de una operación.

El termino es cada uno de los componentes de la operación. En X+2=5 tenemos tres términos, que son la X, el 2 y el 5. Y el signo de todos ellos es positivo.

Para poder resolver esa pequeña ecuación, toca cambiar el término 2 al otro lado de igual, tal que así X= 5 – 2 → X = 3.

Si hay una resta: X – 6 =10 → X= 10+6 → X=16

RECUERDA: Cada vez que desplazamos un término al otro lado del igual (=), toca cambiar el operador por su inverso.

NO CONFUNDIR EL OPERADOR CON EL SIGNO DEL TÉRMINO.

Pero cuando la X va multiplicada o dividida por un número, al saltar éste al otro lado del igual, NUNCA JAMÁS LE CAMBIAREMOS EL SIGNO.

Veamos un ejemplo

$5x + 15 = 0 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x=\frac{-15}{5} \Rightarrow x = -3$

Solución: Pensar *"¿Por qué número puedo dividir (multiplicar) esos dos términos para que me quede la X sola?"*

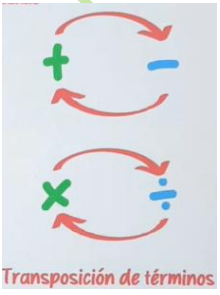
RAMON FERRIMARÍ

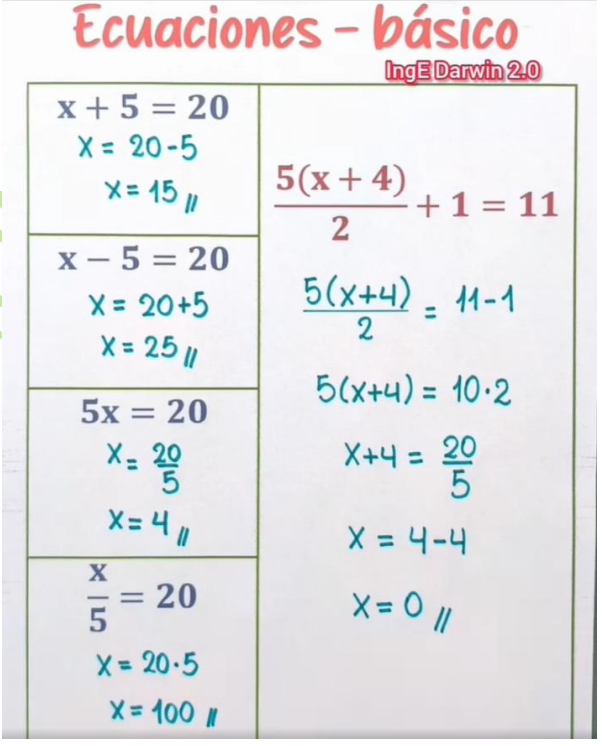
Pues, evidentemente por el número que está multiplicando (dividiendo) la X. Entonces haríamos la siguiente operación:

$5x + 15 = 0 \Rightarrow \frac{5x}{5} + \frac{15}{5} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{5} + \frac{15}{5} = 0$

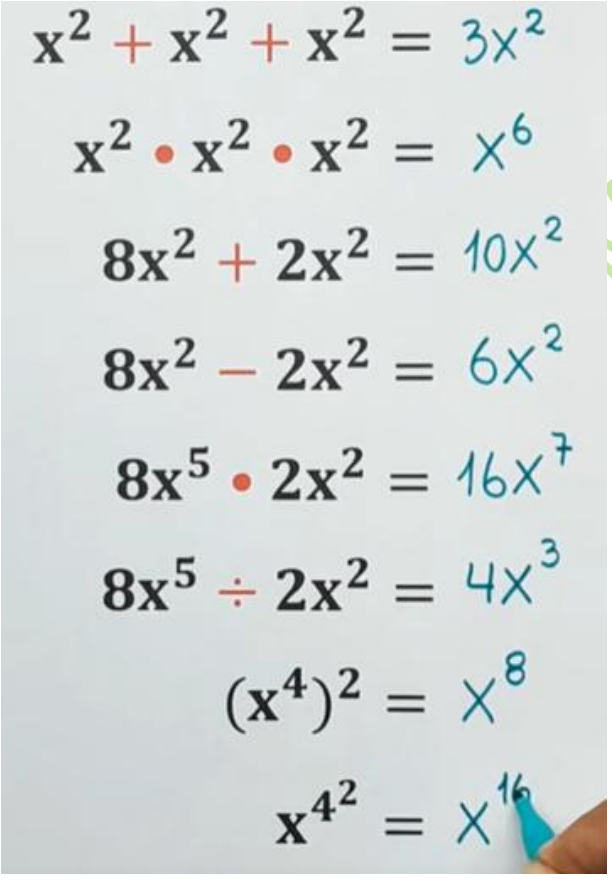
$x + 3 = 0 \Rightarrow$ **x = -3**

Este es el método de la transposición de términos, lo que implica mover elementos entre ambos lados de la igualdad, con la pretensión de dejar la X sola. No olvidemos que, cuando hagamos la transposición del término que multiplica o divide a la X, **Jamás cambiaremos el signo.** Lo repetiré hasta la extenuación, porque es un fallo muy, pero que muy corriente.



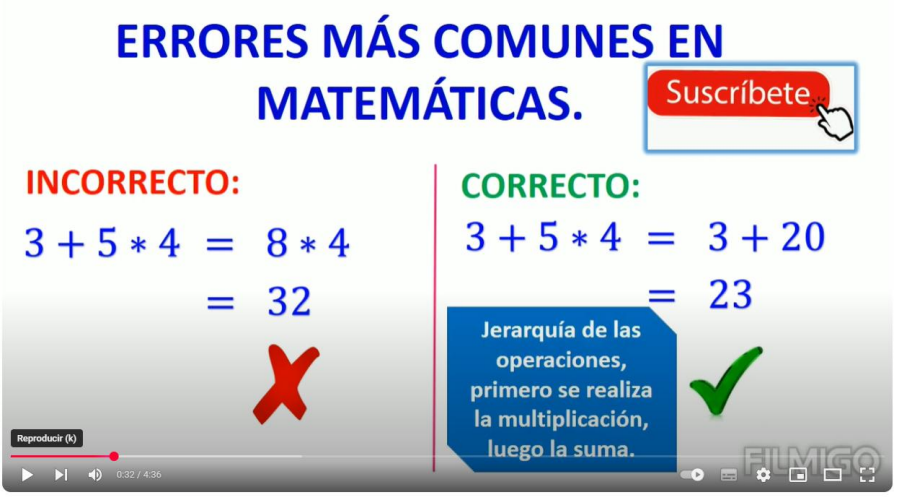


Antes de seguir hablando de errores comunes, veamos cómo se hacen esas operaciones de manera correcta. Huelga decir que estamos repasando las operaciones con potencias:



Y ahora, os presento el Hit Parade de las diez pifias más usuales y garrafales.

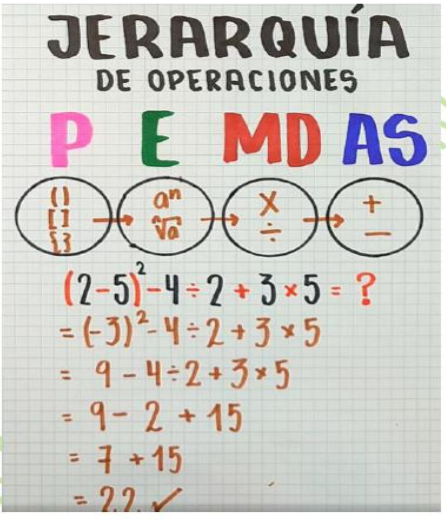
DIAPOSITIVA 1



Errores más comunes en Matemáticas.

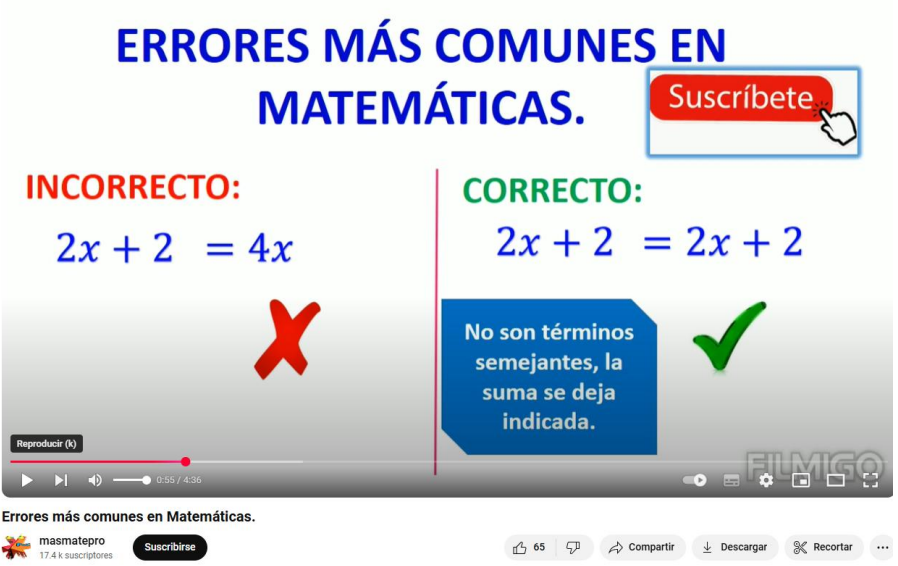
masmatepro
17.4 k suscriptores
Suscribirse
65
Compartir
Descargar
Recortar

Debes recordar siempre el orden de prioridad en la resolución de operaciones PEMDAS:



1) **P**aréntesis
2) **E**xponentes (Potencias y Raíces)
3) **M**ultiplicaciones y **D**ivisiones.
4) **A**diciones (Sumas) y **S**ustracciones (Restas).

DIAPOSITIVA 2



Siendo sumas y restas No podemos mezclar churras con merinas: la operación se deja tal y como está

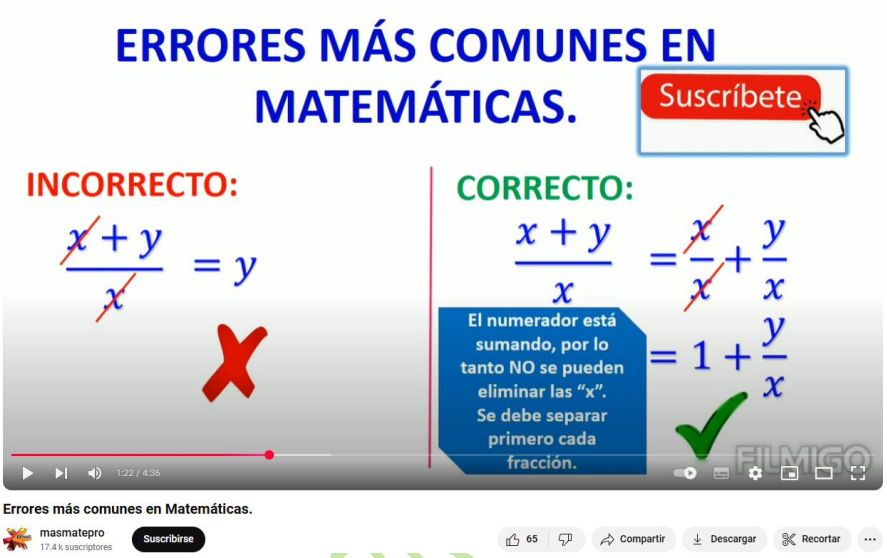
2x + 2 = 2x + 2 2x - 2 = 2x – 2

Pero si se trata de multiplicaciones y divisiones sí podemos operar

(2x) * 2 = 4x

$$\frac{2x}{2} = x$$

DIAPOSITIVA 3

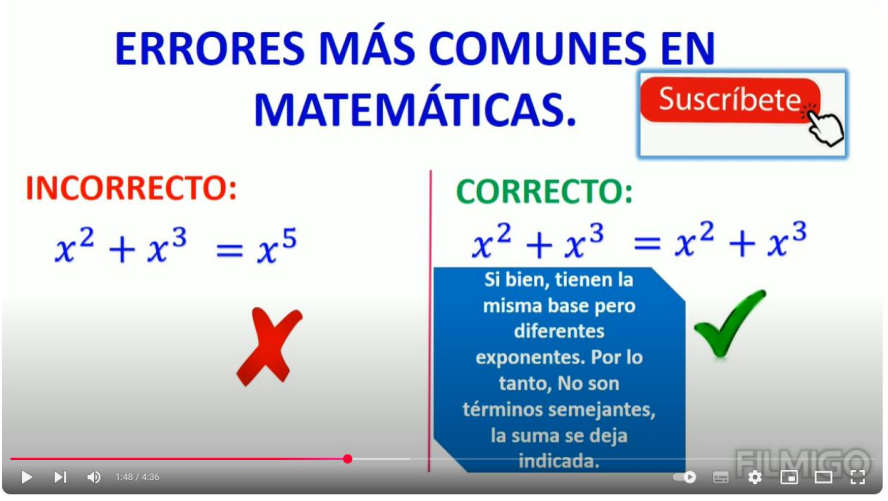


Lo dicho, ojo al Cristo que es de Plata:

Cuando las operaciones son sumas y restas, pasa una cosa, y cuando las operaciones son multiplicaciones y divisiones, pasa otra cosa diferente.

Siempre que veas en una operación de éstas, con sumas y restas = PELIGRO

DIAPOSITIVA 4



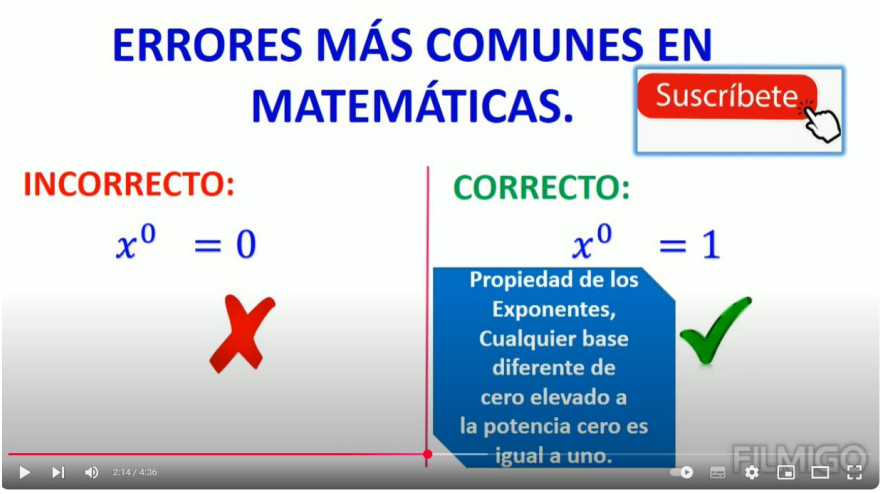
Vuelta la mula al carro:

Cuando las operaciones son sumas y restas, pasa una cosa, y cuando las operaciones son multiplicaciones y divisiones, pasa otra cosa diferente.

Siempre que veas en una operación con sumas y restas = PELIGRO

Aquí la pífia ha sido confundir la suma con una multiplicación, porque en $x^2 * x^3$ sí se suman los exponentes, siendo x^5.

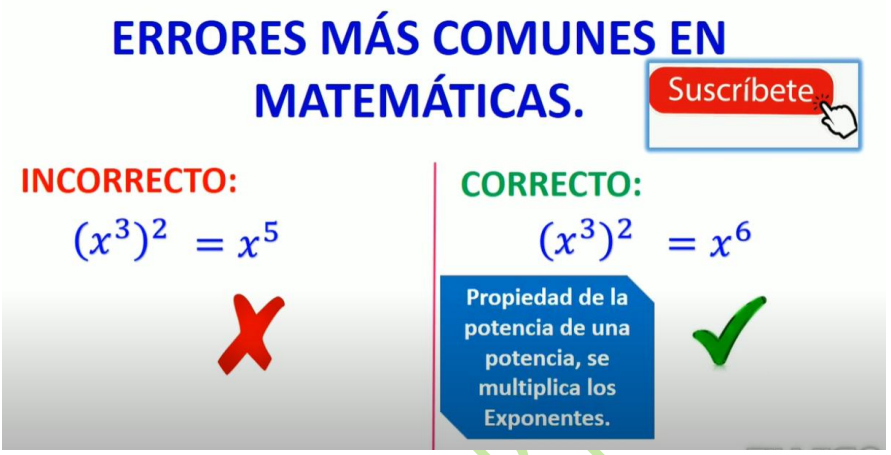
DIAPOSITIVA 5



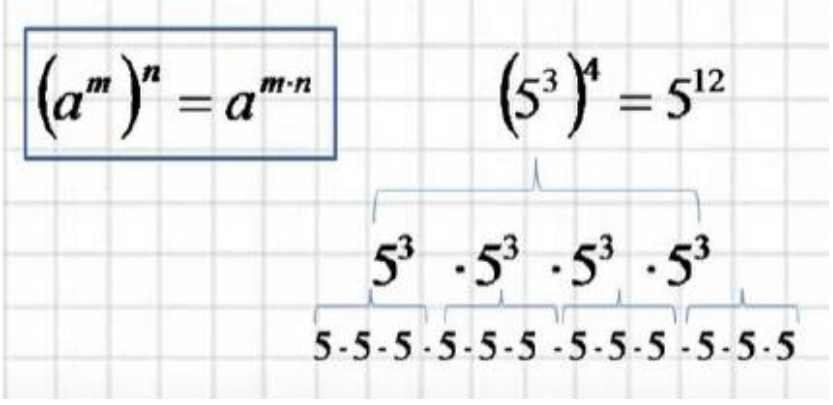
Debemos dominar las leyes de las potencias y tenerlas clara.

$a^0 = 1$ → $1 = \frac{8}{8} = \frac{2^3}{2^3} = 2^0$ Aplicando la Propiedad TRANSITIVA→ *Si a=b y b=c, entonces a=c*

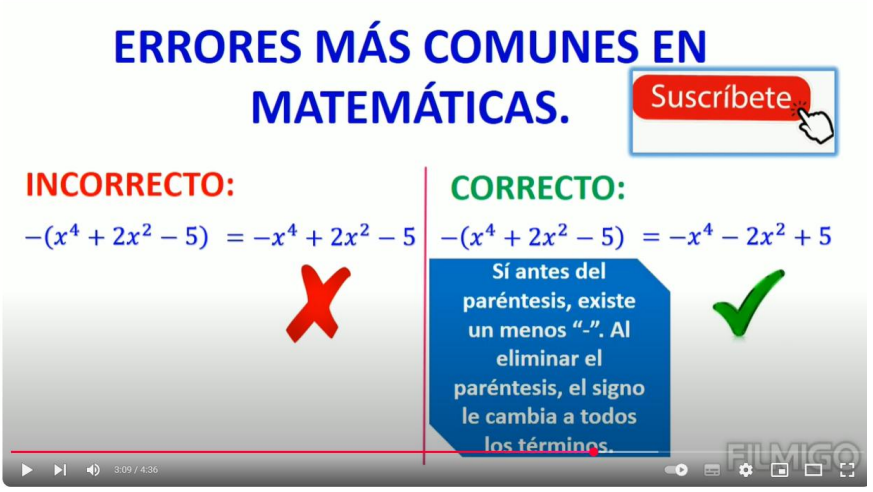
DIAPOSITIVA 6



Más de lo mismo, esas leyes de potencias, como la palma de tu mano:



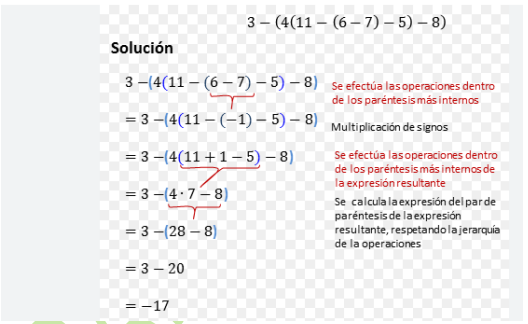
DIAPOSITIVA 7



Errores más comunes en Matemáticas.

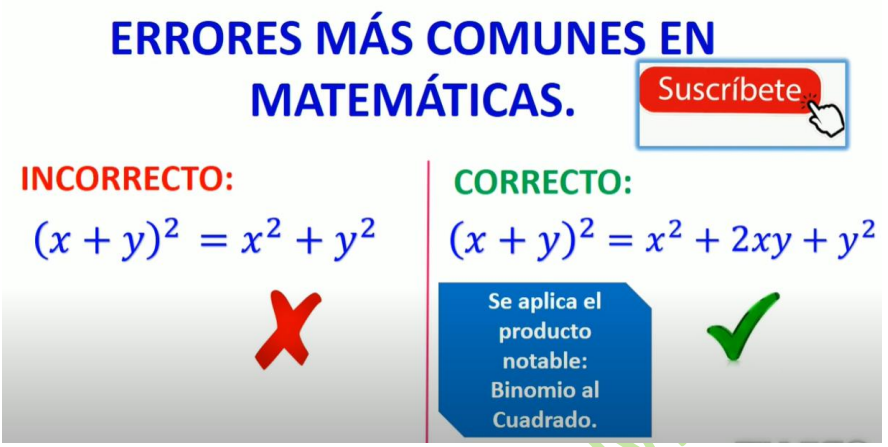
masmatepro
17.4 k suscriptores
Suscribirse
65
Compartir
Descargar
Recortar

MatemáticaTuya



Operación con paréntesis: Paginas 58 a 68

DIAPOSITIVA 8



Como ya dijimos en la página 177, Las identidades notables que vimos en la Geometría Euclideana nos las encontraremos hasta en la sopa:

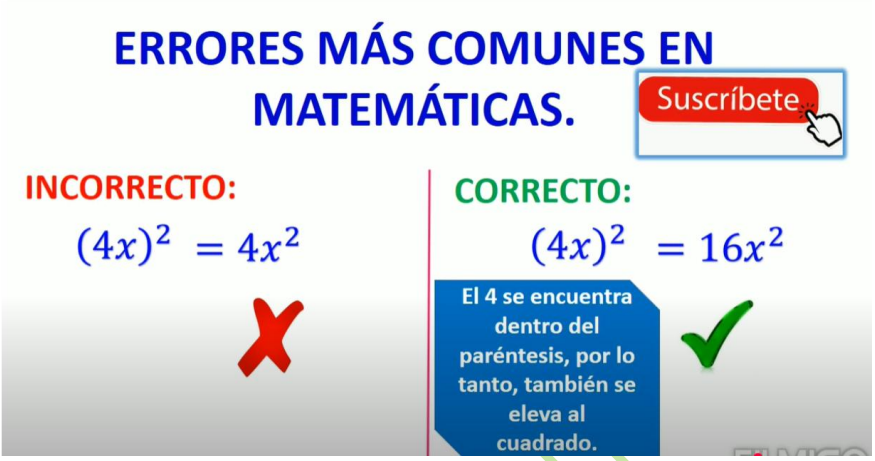
IGUALDADES NOTABLES

$$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

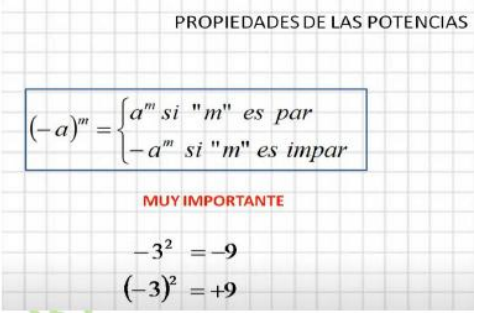
DIAPOSITIVA 9



Operación con paréntesis: Paginas 58 a 68

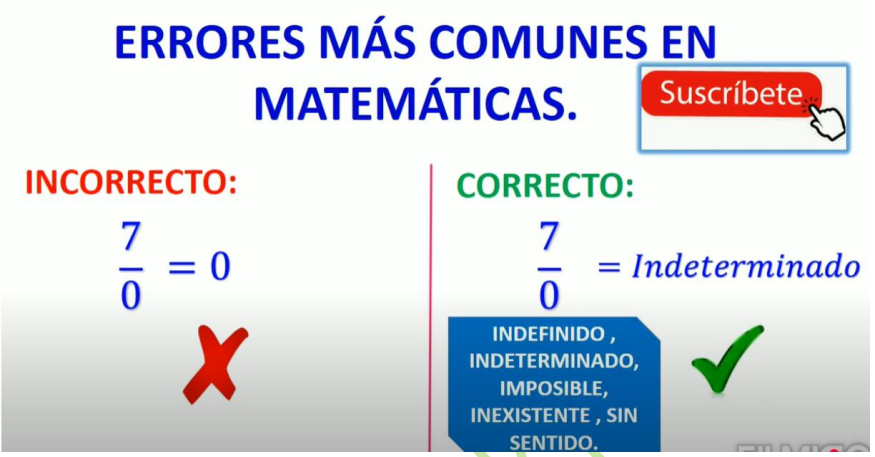
Todo lo que vaya dentro de un paréntesis y esté, a su vez, elevado a algo, se vé afectado por el elevado a algo.

Y cuando digo Todo es TODO: signo, incógnita y número.



Por lo que $(-3)^3 = -27$.

DIAPOSITIVA 10



Una división es una sucesión de restas en las que tenemos por objetivo llegar a cero.

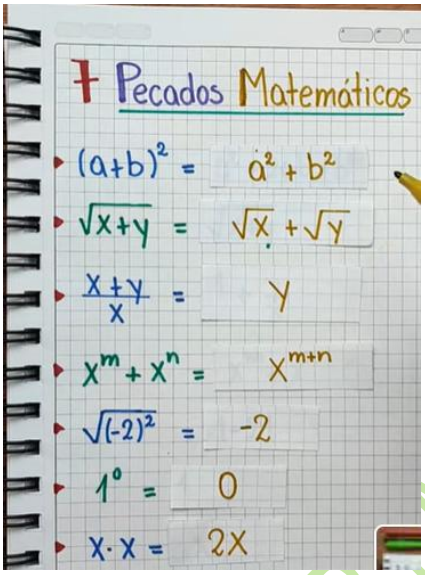
Decimos que 6 dividido entre 3 es igual a dos, porque necesitamos dos restas consecutivas para pasar de 6 a 0.

1º resta 6-3= 3

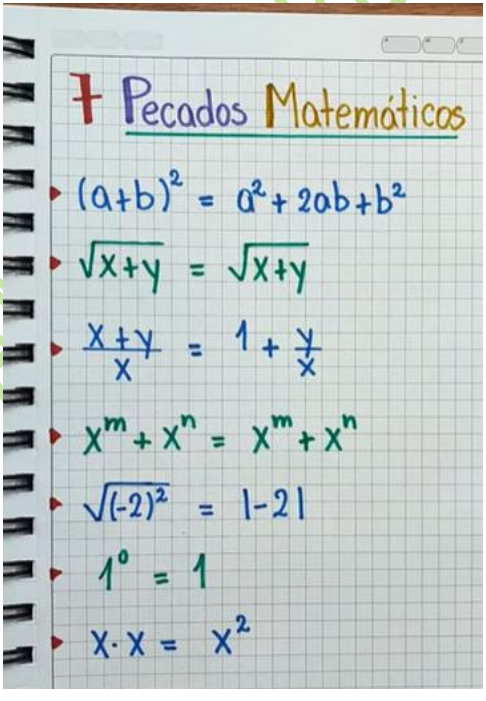
2º resta 3-3= 0

Sin embargo en la operación 6-0 = 6 podemos hacer la resta infinitas veces, que siempre nos dará 6 y por lo tanto, jamás llegaremos a alcanzar el número cero.

RAMON FERRER



MAL ✗



BIEN ✓

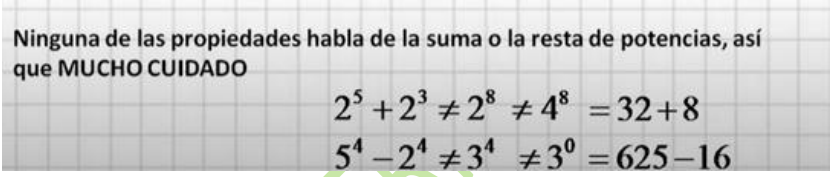
RAQUEL PEREZ MARÍ

Y con las potencias pasa lo mismo: **Las leyes de las potencias NUNCA SE APLICAN A SUMAS Y RESTAS DE POTENCIAS.**

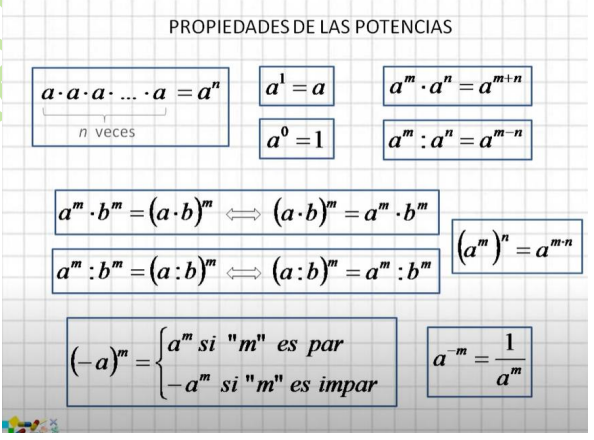
Para el caso de la suma y resta de potencias, **primero operamos cada potencia por separado (de igual o diferente base) y** luego **sumamos o restamos los resultados**.

Esto aplica, tanto si las potencias son de Igual base: $2^5+2^3=32+8$ = 40.

Como si son de Diferente base: $5^4-2^4=625-16$ = 609.



Con las multiplicaciones y divisiones de potencias sí que se aplican las leyes de las potencias, que te resumo brevemente:



EL RESUMEN DEL RESUMEN

Si en Matemáticas precisas o deseas ir más allá de los mínimos matemáticos que establece Don Miquel Albertí Palmer, de los que ya hablamos al principio del libro, debes aprender, y practicar para no olvidar ciertas reglas o partes básicas de Aritmética y Álgebra:

1) JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES (P.E.M.D.A.S.). → Pags. 249 a 251.

2) USO DE LOS PARÉNTESIS. Págs. 58 a 68.

3) PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS. Pàginas 92 a 103.

4) IGUALDADES NOTABLES DE LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA. Páginas 176 a 181.

5) PROCESO L.E.D.O.C. Páginas 451 a 460.

6) SABER CONVERTIR EL ENUNCIADO DE UN PROBLEMA, EN UNA O VARIAS ECUACIONES QUE PERMITAN RESOLVERLO. Páginas 286 a 295.

RAMON FERRER I MARI

Segundo aviso a navegantes:

EL CERO PUEDE COMPORTARSE COMO UN TAXISTA GAMBERRO.

Imagina que llevas un par de horas andando por una ciudad que desconoces. Te hallas en un barrio de las afueras que no dispone de Transporte público.

De repente, aparece un taxi con la luz verde encendida y ves la salvación. Le haces la señal de parada y el vehiculo se detiene a tu altura.

Pero cuando acercas tu mano al tirador de la puerta para abrirla, el muy gamberro se adelanta 5 metros. Decides recorrer esa distancia y cuando vuelves a tener a mano el tirador de la puerta… ¡ZAS! El tipo avanza otros varios metros… Y así, cada vez que te acercas.

Pues el cero, en Análisis matemático y en algunas operaciones, es como ese taxi.

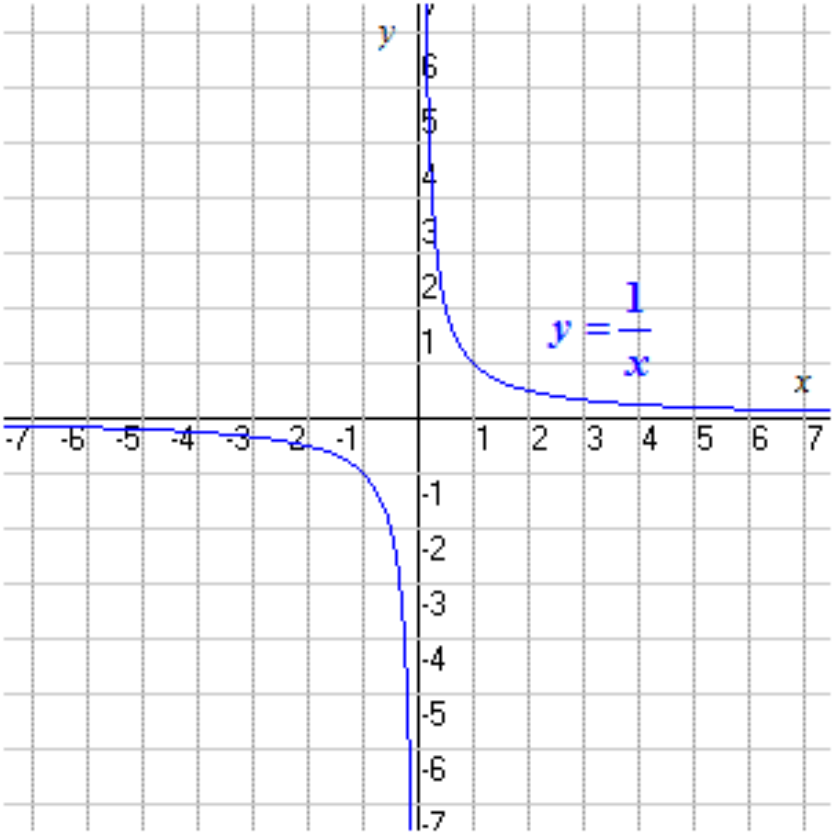
Nunca lo podrás tomar, porque nunca consigues acercarte lo suficiente como para poder agarrar el tirador y abrir la puerta.

RAMON FERRER I MARÍ

Ahora pongámonos científicos y Veámoslo de forma gráfica: Creamos una tabla de valores de 0 a 7 y luego saltemos a valor un millón, respecto de $\frac{1}{x}$ y de $-\frac{1}{x}$ a ver qué pasa:

Valores	1/x	- 1/x
0	∞	-∞
1	1	-1
2	0,5	-0,5
3	0,3	-0,3
4	0,25	-0,25
5	0,20	-0,20
6	0,16	-0,16
7	0,14	-0,14
1.000.000	0.000001	-0.000001

Aunque soy consciente que la gráfica de la página siguiente no nos permite alcanzar el valor de un millón, lo pongo con la finalidad que quede claro que, demos el valor que demos a X, por muy grande que éste sea, **jamás será 0, por mucho que nos aproximemos**.

RAMON FERRER MARÍ

Si lo representamos en una gráfica, queda tal que así: